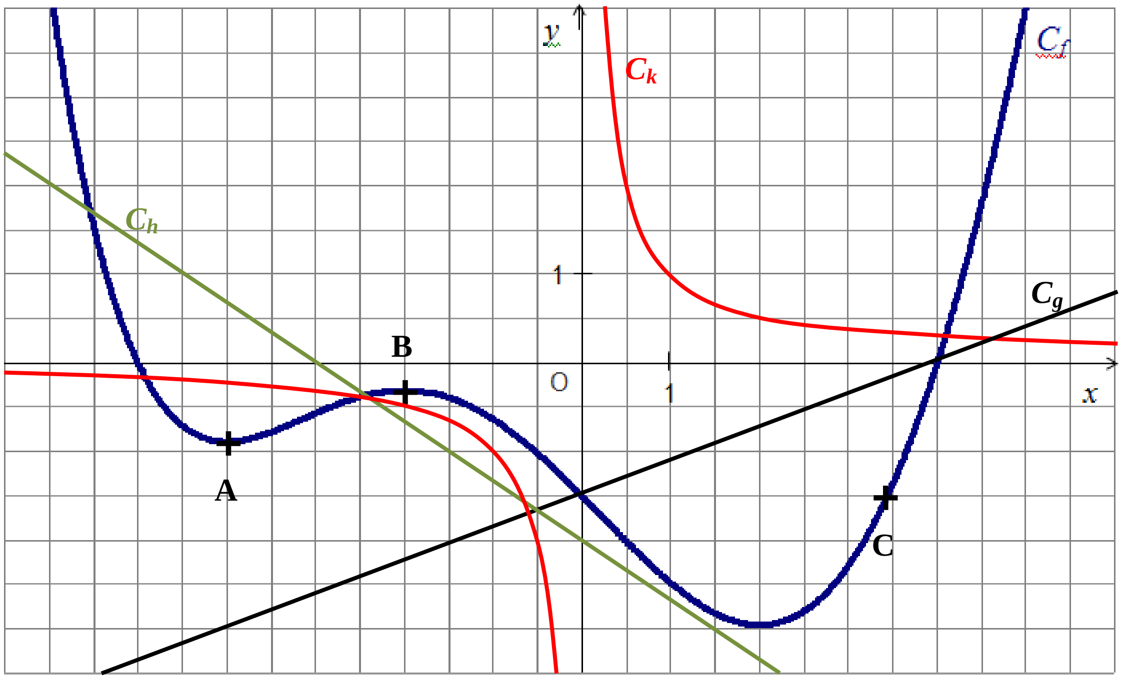
2nde

Eléments de correction du DNS 15

Lectures graphiques

Soient f et g deux fonctions définies sur IR.
Leurs représentations graphiques, notées respectivement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, sont tracées dans le repère ci-dessous.
On admet que la courbe $\mathcal{C}_f$ passe par les points A (– 4 ; – 0,8), B (– 2 ; – 0,3) et C (3,4 ; – 1,5).



A partir du graphique, répondre aux questions suivantes :

1. Donner $f(0)$ **$f(0) = -1,5$**
2. Résoudre $f(x) = 0$ **S = {– 5 ; 4}**
3. Déterminer un intervalle d'amplitude 0,5 auquel appartient chacune des solutions de l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$

   L'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ possède 2 solutions x_1 et x_2 telles que : **$x_1 \in [-5,5\,;-5]$ et $x_2 \in [4\,;4,5]$**

4. Donner le tableau de signes de $f(x)$

x	$-\infty$		-5		4		$+\infty$
Signe de $f(x)$		+	0	–	0	+	

5. Établir le tableau des variations de la fonction f

x	$-\infty$	-4	-2	2	$+\infty$
Variations de f	↘	– 0,8 ↗	– 0,3 ↘	– 3 ↗	

6. Résoudre $f(x) > -1,5$ **S =] – ∞ ; 0 [∪] 3,4 ; + ∞ [**
7. a) Donner l'expression de $g(x)$ en fonction de x

   La représentation graphique de g est une droite, donc $g(x)$ est de la forme : $a\,x + b$.
   La droite passe par les points de coordonnées (0 ; – 1,5) et (4 ; 0), donc

   $$a = \frac{0-(-1,5)}{4-0} = \frac{1,5}{4} = \frac{3}{8} = \mathbf{0,375} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{g(0) = -1,5}$$

   D'où **$g(x) = 0,375\,x - 1,5$**

   b) Résoudre $f(x) \leq g(x)$ **S = [0 ;4]**

8. Dans le même repère, tracer la représentation graphique de la fonction h définie par $h(x) = -\frac{2}{3}x - 2$.

   On la nommera $\mathcal{C}_h$. h est une fonction affine, $h(0) = -2$ et $h(-3) = 0$,
   donc $\mathcal{C}_h$ est une droite qui passe par les points de coordonnées (0 ; – 2) et (–3 ; 0)

9. Dans le même repère, tracer la représentation graphique de la fonction inverse que l'on nommera $\mathcal{C}_k$, puis déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k(x)$ **PARTIE pas encore étudiée en cours**

   L'équation $f(x) = k(x)$ possède 3 solutions.

QCM *Pour chaque ligne du tableau suivant, 3 réponses sont proposées, mais une seule est exacte.*

Dans la dernière colonne du tableau, recopiez la lettre correspondant à la réponse choisie.

1. Si $-3 < x < -1$, alors :	a) $0 < x^2 < 9$	b) $1 < x^2 < 9$	c) $9 < x^2 < 1$	**b**
2. L'expression factorisée de $3x^2 + 6x$ est égale à :	a) $3x(x+6)$	b) $3x(x+2)$	c) autre réponse	**b**
3. L'expression factorisée de $(x-5)^2 - 36$ est égale à :	a) $(x-11)(x+1)$	b) $(x-11)(x-1)$	c) autre réponse	**a**
4. L'équation $4(x+2)(3-7x) = 0$ a pour ensemble solution :	a) $S = \{-2\,;\,\frac{3}{7}\}$	b) $S = \{-2\,;\,\frac{7}{3}\}$	c) autre réponse	**a**
5. L'expression développée de $6\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{19}{2}$ est égale à :	a) $36x^2 + 36x - \frac{1}{2}$	b) $6x^2 - 8$	c) $6x^2 + 6x - 8$	**c**

Le tableau de variations d'une fonction f définie sur $[-7\,;\,10]$ est le suivant :

x	-7		-3		2		5		7		10
$f(x)$	2	↗	5	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1

6. Le tableau de signes de $f(x)$ est :

a)

x	-7		2		7		10
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b)

x	-7		-3		5		10
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

c)

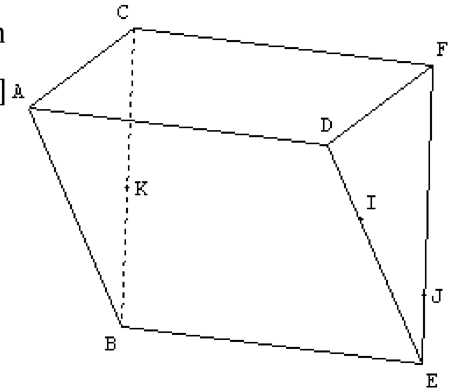
x	-7		2		7		10
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Réponse : **a**

7. On considère les images de -4 et de 8 par la fonction f ci-dessus, on a :	a) $f(-4) > f(8)$	b) $f(-4) < f(8)$	c) on ne peut pas les comparer	**a**
8. a et b sont deux réels de l'intervalle $[-3\,;\,5]$ tels que $a < b$, on a :	a) $f(a) < f(b)$	b) $f(a) > f(b)$	c) on ne peut pas les comparer	**b**

Sur la figure ci-contre, ABCDEF est un prisme droit à base trian

I, J et K sont respectivement des points des segments [DE], [EF]

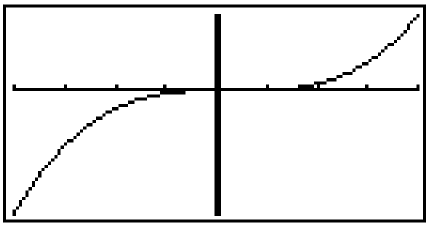


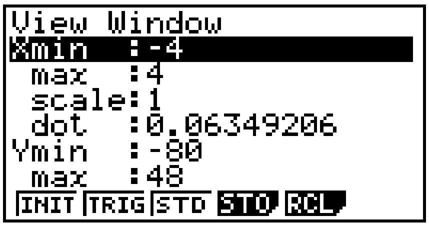
9. Sur le prisme ABCDEF :	a) Les plans (DEF) et (ABC) sont sécants	b) Les plans (DEF) et (ABC) sont coplanaires	c) Les plans (DEF) et (ABC) sont strictement parallèles	**c**
10. Sur le prisme ABCDEF :	a) Les droites (DF) et (IJ) sont sécantes	b) Les droites (DF) et (IJ) sont parallèles	c) Les droites (DF) et (IJ) sont non coplanaires	**a**
11. Sur le prisme ABCDEF :	a) Les droites (AC) et (KI) sont sécantes	b) Les droites (AC) et (KI) sont non coplanaires	c) Les droites (AC) et (KI) sont parallèles	**b**

Savoir utiliser la calculatrice

Soit la fonction f définie sur [– 4 ; 4] par $f(x) = x^3 - x^2$

1. En utilisant le mode Graph de la calculatrice, faire une ébauche du tracé de la représentation graphique de f. Vous indiquerez les réglages utilisés.

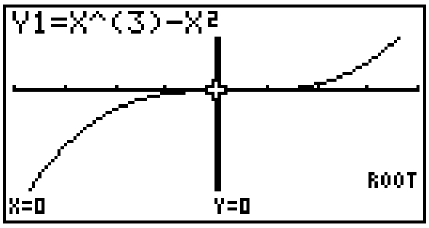


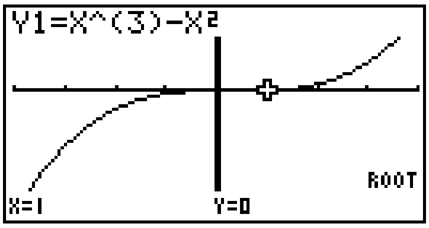


2. Conjecturer le nombre de points d'intersection de cette représentation graphique et de l'axe des abscisses.

   Vous indiquerez votre démarche. Est-ce cohérent avec le tracé visualisé ci-dessus ? Expliquez.

   A l'aide du solveur graphique (GSolv ou Calculs), on recherche les racines (Root) du polynôme.



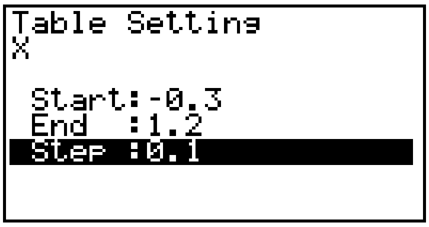


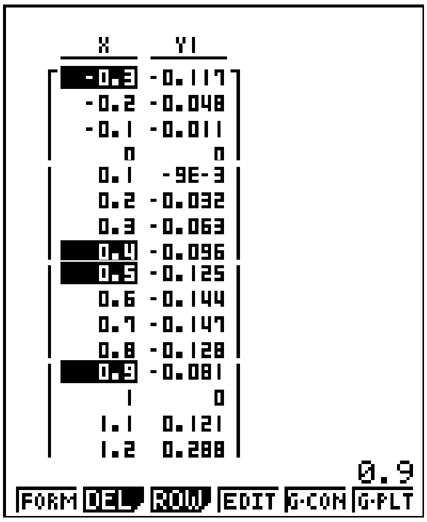
   Il semble qu'il y ait 2 points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.

   Sur l'ébauche dessinée précédemment, on ne voit pas ces deux points, car le tracé manque de précision.

3. En utilisant le mode Table de la calculatrice, donner plus de précision sur les variations de f. Expliquez votre démarche.

   D'après l'observation précédente, la courbe coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses respectives 0 et 1. On cherche donc les valeurs de $f(x)$ sur l'intervalle [– 0,3 ; 1,2], avec un pas de 0,1.

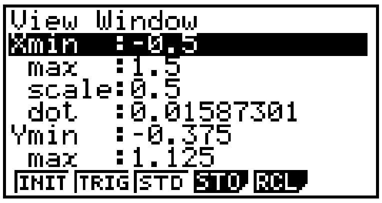


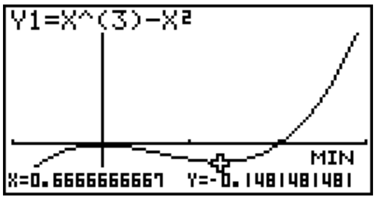


On peut alors conjecturer que :

la fonction est croissante jusqu'en 0,
puis décroissante jusqu'à environ 0,7,
puis à nouveau croissante.

On peut préciser l'allure de la courbe de f, en changeant la fenêtre d'affichage et en utilisant le solveur graphique pour conjecturer le minimum de f sur l'intervalle [0 ; 1,5].





Echantillonnage

Certains polluants ont une influence sur le nombre de naissances de garçons.
Il naît habituellement 105 garçons pour 100 filles.

1. A Ufa, en Russie, dans les années 1980, parmi les 227 enfants des personnes exposées à des pesticides dans une usine d'engrais, 91 sont des garçons.

   Peut-on dire que cette usine a eu un impact sur le nombre de naissances des garçons ?

   Il naît habituellement 105 garçons pour 100 filles donc $p = \frac{105}{105 + 100} = \frac{105}{205} = \frac{21}{41} \simeq 0{,}512$

   donc on a bien $0{,}2 \leq p \leq 0{,}8$

   $n = 227$ On a bien $n \geq 25$

   On peut donc déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% égale à $\left[\mathrm{p} - \frac{1}{\sqrt{n}} \,;\, \mathrm{p} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$

   Or, $\mathrm{p} - \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{21}{41} - \frac{1}{\sqrt{227}} \simeq 0{,}446$ $\mathrm{p} + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{21}{41} + \frac{1}{\sqrt{227}} \simeq 0{,}579$

   Cet intervalle est donc [0,446 ; 0,579] $f = \frac{105}{227} \simeq 0{,}463$

   f appartient à l'intervalle de fluctuation au seuil de 95%,

   on en conclut que **cette usine n'a pas eu d'impact sur le nombre de naissances des garçons**.

2. Dans le village d'Aamjiwnaag, situé au Canada à proximités d'usines chimiques, il est né entre 1999 et 2003, 132 enfants dont 46 garçons.

   Peut-on dire que ces usines chimiques ont eu un impact sur le nombre de naissances des garçons ?

   On a toujours $p = \frac{105}{105 + 100} = \frac{105}{205} = \frac{21}{41} \simeq 0{,}512$ donc on a bien $0{,}2 \leq p \leq 0{,}8$

   $n = 132$ On a bien $n \geq 25$

   On peut donc déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% égale à $\left[\mathrm{p} - \frac{1}{\sqrt{n}} \,;\, \mathrm{p} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$

   Or, $\mathrm{p} - \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{21}{41} - \frac{1}{\sqrt{132}} \simeq 0{,}425$ $\mathrm{p} + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{21}{41} + \frac{1}{\sqrt{132}} \simeq 0{,}599$

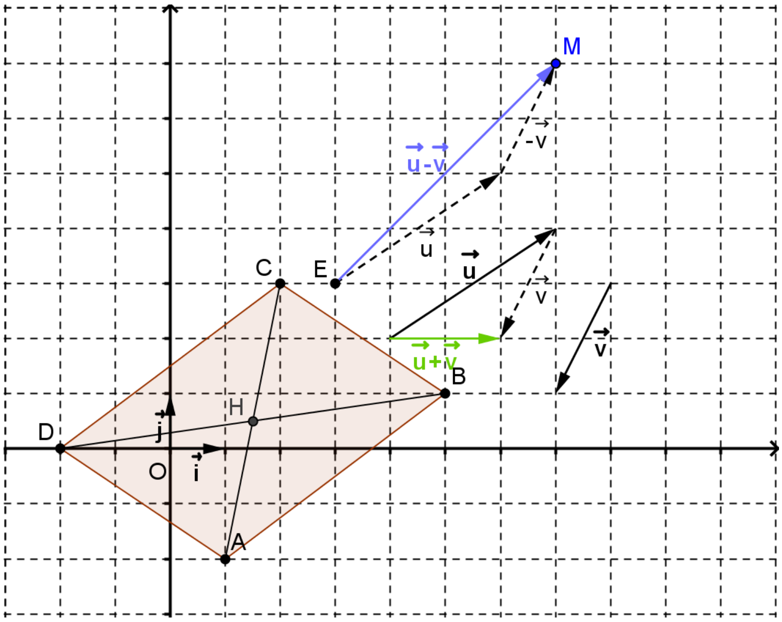
   Cet intervalle est donc [0,425 ; 0,599] $f = \frac{46}{132} = \frac{23}{66} \simeq 0{,}348$

   f n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation au seuil de 95%, on en conclut, **avec un risque d'erreur de 5%, que ces usines ont eu un impact sur le nombre de naissances des garçons.**

Vecteurs, sommes et translations :

Exercice 1

Dans le repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) ci-contre,



1) Tracer en vert le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$
   (on laissera les traits de construction)

2) Placer le point M tel que : $\overrightarrow{EM} = \vec{u} - \vec{v}$

3) a) Lire les coordonnées des points A, B, C et D.

   A(1 ; – 2) ; B(5 ; 1) ; C(2 ; 3) ; D(– 2 ; 0)

   b) Montrer alors que ABCD est un parallélogramme.

   Première méthode : avec des vecteurs

   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5-1 \\ 1-(-2) \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

   $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 2-(-2) \\ 3-0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

   On a donc $\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \overrightarrow{\mathbf{DC}}$ **.** **On peut en déduire que ABCD est un parallélogramme.**

   Seconde méthode : avec les diagonales

   Soit H le milieu du segment [AC] :

   $\begin{cases} x_H = \dfrac{x_A + x_C}{2} \\ y_H = \dfrac{y_A + y_C}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x_H = \dfrac{1+2}{2} \\ y_H = \dfrac{-2+3}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x_H = \dfrac{3}{2} \\ y_H = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

   Donc **H** $\left(\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} ; \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)$

   Soit I le milieu du segment [BD] :

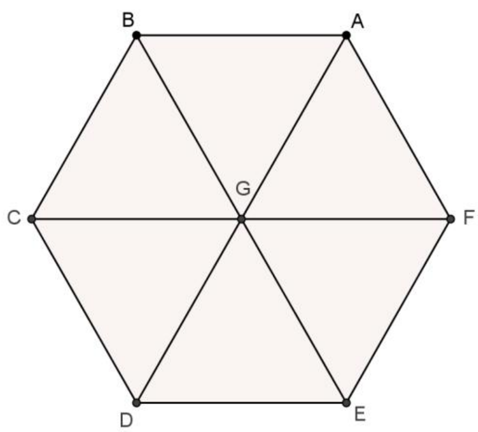
   $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_B + x_D}{2} \\ y_I = \dfrac{y_B + y_D}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x_I = \dfrac{5-2}{2} \\ y_I = \dfrac{1+0}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x_I = \dfrac{3}{2} \\ y_I = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ Donc **I** $\left(\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} ; \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)$

   Par conséquent H et I sont confondus, donc les diagonales du quadrilatère ABCD ont même milieu.
   On en déduit que ABCD est un parallélogramme.

Exercice 2

Sur la figure ci-contre, ABCDEF est un hexagone régulier de centre G.

Compléter le tableau ci-dessous :



La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ transforme G en	**C**
Un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{EG}$ est	$\overrightarrow{\mathbf{GB}}$
$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} =$	$\vec{\mathbf{0}}$
$\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{AB} =$	$\overrightarrow{\mathbf{AE}}$

Fonctions

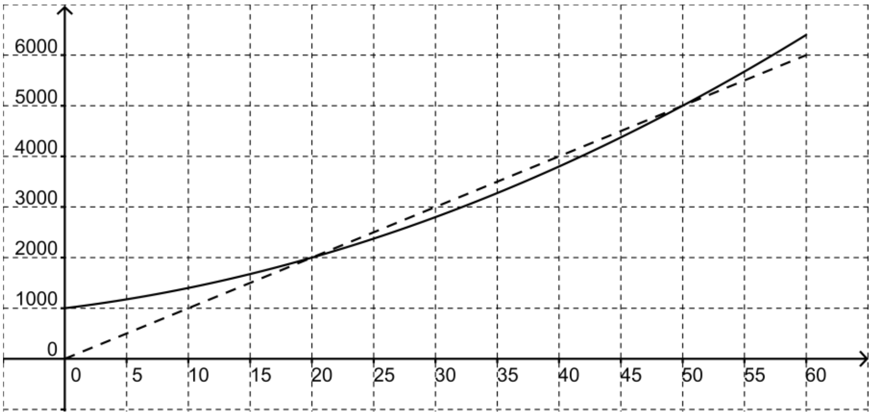
A sa grande surprise, Charlie vient d'être nommé responsable de la chocolaterie de son village. Malheureusement, l'entreprise est en difficulté et Charlie doit trouver une solution pour que la production soit de nouveau rentable.

On note x la quantité de chocolat produite (en tonnes), avec $0 \leq x \leq 60$.

Charlie sait que le coût de production comme la recette de son entreprise est fonction de la quantité produite.

Son objectif est double :
- rendre la production rentable ;
- maximiser le bénéfice de sa chocolaterie.

Le graphique ci-dessous donne le coût de production ainsi que la recette (en k€) en fonction de la quantité produite (en tonnes). La courbe en trait plein est associée au coût, la droite en pointillés à la recette.



1. a) A partir de ce graphique, conjecturer la quantité de chocolat que doit produire la chocolaterie pour être rentable.

   Pour être rentable, la recette de la chocolaterie doit être supérieure au coût de production.
   Or la courbe représentant la recette est strictement au-dessus de la courbe représentant le coût sur]20 ; 50[.
   La chocolaterie doit donc produire entre 20 tonnes et 50 tonnes de chocolat pour être rentable.

   b) Conjecturer la quantité à produire pour que le bénéfice soit maximum.

   Pour que le bénéfice soit maximum, il faut que la recette soit supérieure au coût (c'est-à-dire que la courbe en trait plein soit en dessous de la droite en pointillés) et que la distance entre ces deux courbes soit maximale.
   Il semble donc que le bénéfice soit maximum pour une production de 35 tonnes de chocolat.

2. Les formules donnant le coût C (x) et la recette R (x) de la chocolaterie ont étés calculées :

$$C(x) = x^2 + 30x + 1000 \qquad \text{et} \qquad R(x) = 100x$$

   a) Justifier que l'entreprise fait du bénéfice pour une production de chocolat x si, et seulement si, x est solution de l'inéquation : $-x^2 + 70x - 1000 > 0$

   L'entreprise fait du bénéfice pour une production de chocolat x si, et seulement si,

$$R(x) - C(x) > 0.$$

   Or $R(x) - C(x) > 0 \Leftrightarrow 100x - (x^2 + 30x + 1000) > 0$
   $\Leftrightarrow 100x - x^2 - 30x - 1000 > 0$
   $\Leftrightarrow -x^2 + 70x - 1000 > 0$

   b) Montrer que pour tout réel x, on a :

   $-x^2 + 70x - 1000 = (-x + 20)(x - 50)$

   $\mathbf{(-x + 20)(x - 50)} = -x^2 + 50x + 20x - 20 \times 50$
   $\mathbf{= -x^2 + 70x - 1000}$

c) Résoudre l'inéquation $(-x + 20)(x - 50) > 0$.

$-x + 20 = 0$ $\quad\quad$ $x - 50 = 0$

$x = 20$ $\quad\quad$ $x = 50$

$a = -1,\ a < 0$ $\quad\quad$ $a = 1,\ a > 0$

x	0		20		50		60
Signe de $-x + 20$		+	0	–		–	
Signe de $x - 50$		–		–	0	+	
Signe de $(-x + 20)(x - 50)$		–	0	+	0	–	

S =] 20 ; 50 [.

Interpréter en terme économique les solutions de cette inéquation.

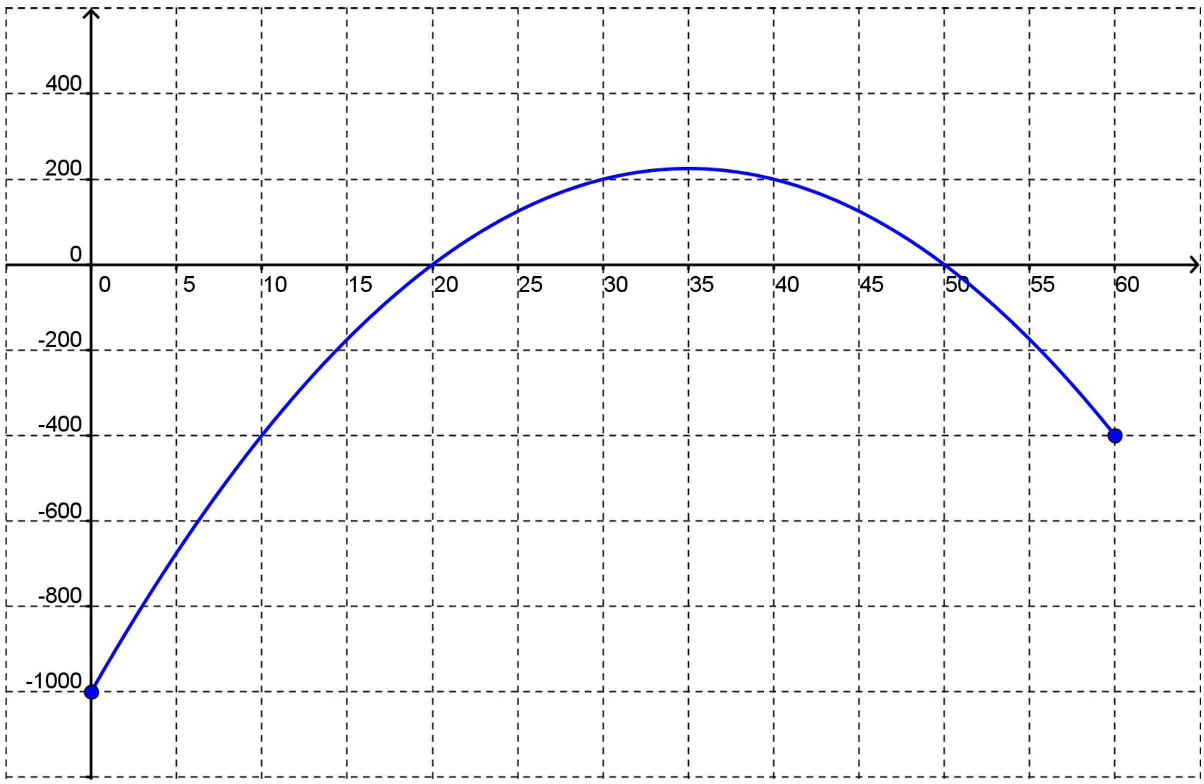
Lorsque l'entreprise produit entre 20 et 50 tonnes de chocolat, elle gagne de l'argent (le bénéfice est positif).

3. Soit la fonction B définie sur [0 ; 60] par :

$$B(x) = -x^2 + 70x - 1000$$

a) Tracer la courbe représentative de la fonction B dans le repère ci-dessous.

Utiliser le menu Table de la calculatrice, en réglant le SET (pour Casio), ou saisir l'expression de la fonction puis déf table (pour TI), et enfin placer les points à partir des valeurs de X et de Y obtenues dans la table de valeurs.



b) Déterminer le bénéfice maximal que la chocolaterie peut espérer, ainsi que la quantité x pour laquelle il sera atteint.

$B(x) = -x^2 + 70x - 1000$ $\quad\quad$ $-x^2 + 70x - 1000$ $\quad\quad$ est de la forme $ax^2 + bx + c$, avec $a = -1$, $a < 0$

donc la fonction : $x \mapsto -x^2 + 70x - 1000$ $\quad\quad$ est d'abord croissante puis décroissante.

De plus, cherchons les coordonnées du sommet de la parabole d'équation $y = -x^2 + 70x - 1000$

$-x^2 + 70x - 1000 = -1000$

$-x^2 + 70x = 0$

$x(-x + 70) = 0$

$x = 0$ $\quad$ ou $\quad$ $x = 70$

$x_S = \dfrac{0 + 70}{2} = 35$ $\quad\quad$ donc **le bénéfice maximal est atteint pour 35 tonnes de chocolat.**

$y_S = B(x_S) = -35^2 + 70 \times 35 - 1000 = 225$ $\quad\quad$ **Le bénéfice maximal est de 225 000 €**

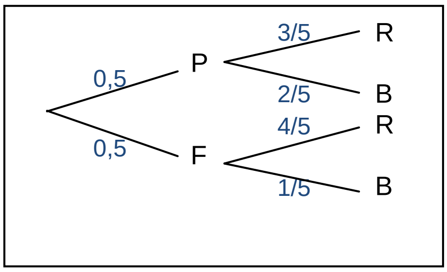
Probabilités

On possède une pièce équilibrée et deux sacs : le sac A qui contient 3 boules rouges et 2 boules blanches et le sac B qui contient 4 boules rouges et une blanche. On veut organiser un jeu en utilisant tout ou une partie de ces éléments.

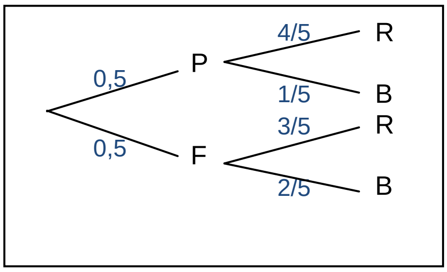
Des élèves ont imaginé puis schématisé « leur » jeu par un arbre.

Pour chacun des jeux imaginés retrouver la règle du jeu.
Pour le jeu n°1, compléter ensuite l'arbre donné avec les probabilités correspondantes.
Pour le jeu n°2, décider de ce que signifie « gagner » à ce jeu, puis calculer alors la probabilité pour qu'un joueur gagne.

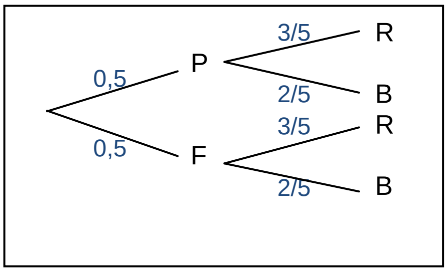
Jeu n°1



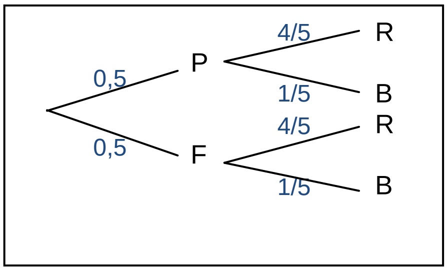
Règle 1a :
On lance la pièce de monnaie.
Si on obtient Pile, on tire un jeton du sac A et si elle obtient Face, on tire un jeton du sac B



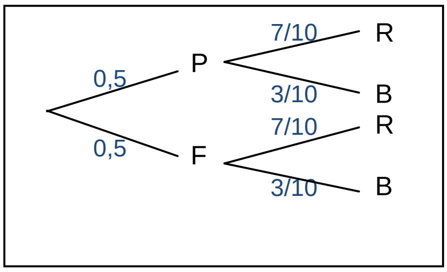
Règle 1b :
On lance la pièce de monnaie.
Si on obtient Pile, on tire un jeton du sac B et si elle obtient Face, on tire un jeton du sac A



Règle 1c :
On lance la pièce de monnaie, puis on tire un jeton du sac A.

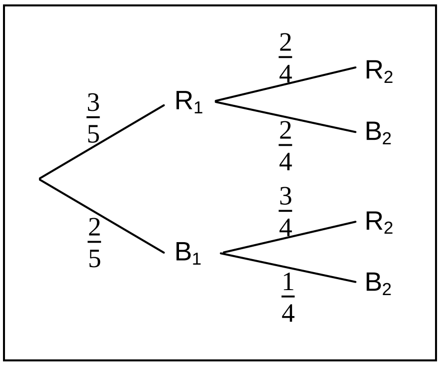


Règle 1d :
On lance la pièce de monnaie, puis on tire un jeton du sac B.



Règle 1e :
On lance la pièce de monnaie, puis ayant mélangé les jetons des deux sacs, on tire au hasard un jeton.
Remarque : on a alors tiré au hasard un jeton parmi 7 jetons rouges et 3 jetons blancs.

Jeu n°2



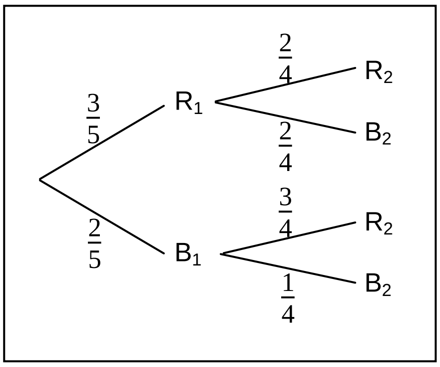
Règle 2a :

Le joueur tire une boule du sac A puis, sans la remettre, il tire une seconde boule de ce sac A.

Le joueur gagne s'il obtient deux boules de même couleur :

La probabilité de gagner est donc de :

$\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0{,}4$



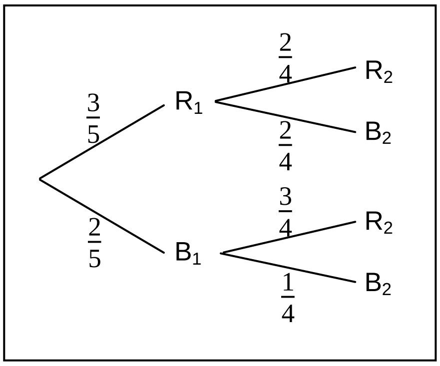
Règle 2b :

Le joueur tire une boule du sac A puis, sans la remettre, il tire une seconde boule de ce sac A.

Le joueur gagne s'il obtient deux boules de couleurs différentes :

La probabilité de gagner est donc de :

$\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 0{,}6$



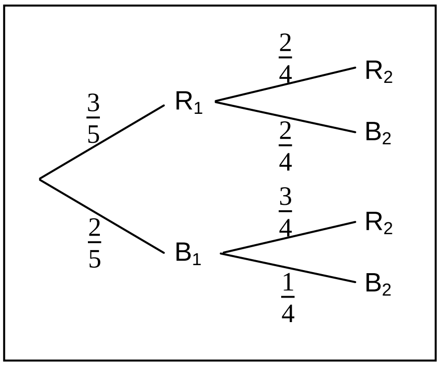
Règle 2c :

Le joueur tire une boule du sac A puis, sans la remettre, il tire une seconde boule de ce sac A.

Le joueur gagne s'il obtient au moins une boule rouge.

La probabilité de gagner est donc de :

$\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} + \quad = \frac{18}{20} = \frac{9}{10} = 0{,}9$



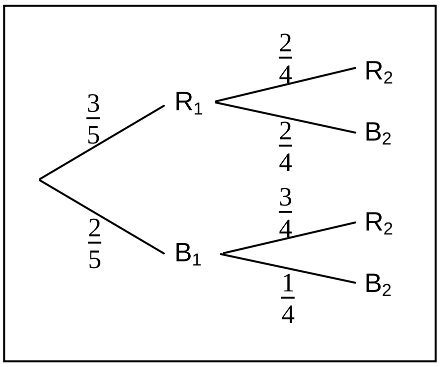
Règle 2d :

Le joueur tire une boule du sac A puis, sans la remettre, il tire une seconde boule de ce sac A.

Le joueur gagne s'il obtient au moins une boule blanche.

La probabilité de gagner est donc de :

$\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10} = 0{,}7$



Règle 2e :

Le joueur tire une boule du sac A puis, sans la remettre, il tire une seconde boule de ce sac A.

Le joueur gagne s'il a obtenu une boule blanche puis une boule rouge

La probabilité de gagner est donc de :

$\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0{,}3$