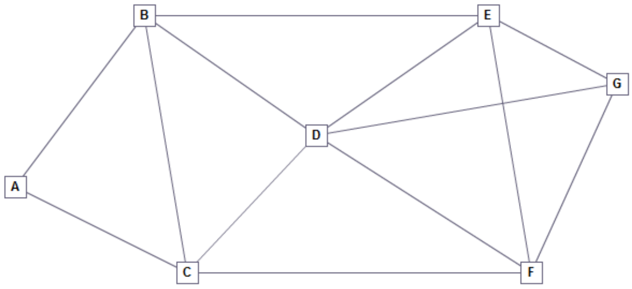
**TES Spécialité Maths** **Eléments de correction du DNS n°9 du Jeudi 16 Mai 2013**

*Objectifs :* *Révisions : graphes eulériens et graphes pondérés*
*Rechercher d'une courbe polynomiale à partir de données.*

## Exercice 1 : *Pondichéry 2013*

### Partie A

On considère le graphe $\Gamma$ ci-contre :




1. Ce graphe admet-il une chaîne eulérienne ? Justifier la réponse. Si oui donner une telle chaîne.

La chaîne A - B - C - D - E - F - G contient tous les sommets du graphe. Par conséquent, pour toute paire de sommets distincts, il existe une chaîne les reliant donc le graphe est connexe.

Dans un graphe non orienté, le degré d'un sommet du graphe est le nombre d'arêtes issues de ce sommet. D'où :

| Sommets | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Degré des sommets du graphe | 2 | 4 | 4 | 5 | 4 | 4 | 3 |

Le graphe est connexe et contient seulement deux sommets de degré impair donc il existe une chaîne eulérienne commençant par un des deux sommets de degré impair (D ou G) et finissant par le deuxième sommet de degré impair.

Le graphe $\Gamma$ admet une chaîne eulérienne. Par exemple D - C - A - B - C - F - G - D - F - E - B - D - E - G.

2. Ce graphe admet-il un cycle eulérien ? Justifier la réponse. Si oui donner un tel cycle.

Les sommets du graphe $\Gamma$ ne sont pas tous de degré pair, donc il n'existe pas de cycle eulérien.

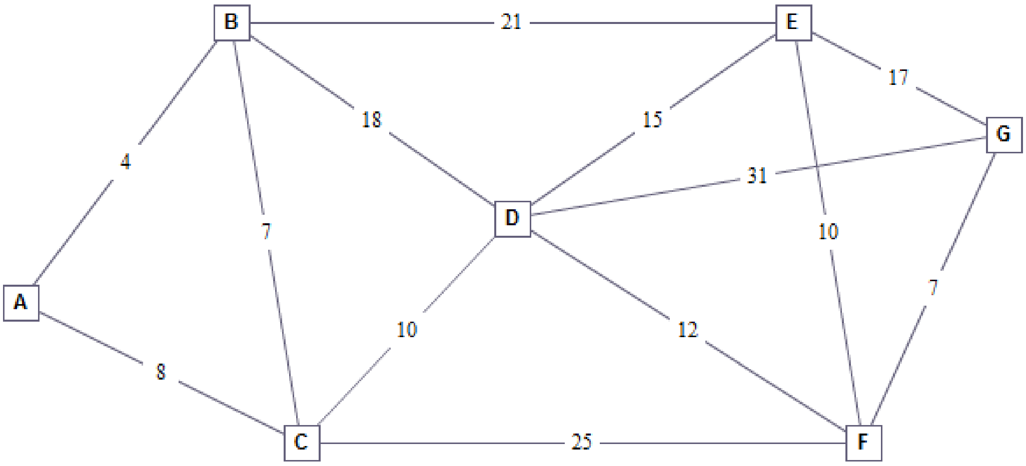
**3.** Donner la matrice M associée au graphe $\Gamma$. Les sommets seront pris dans l'ordre alphabétique : A, B, C, D, E, F, G.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

## Partie B

Une région est munie d'un réseau de trains, représenté par le graphe Γ ci-dessous.

Les stations sont symbolisées par les sommets A, B, C, D, E, F et G. Chaque arête représente une ligne reliant deux gares. Les temps de parcours (correspondance comprise) en minutes entre chaque sommet ont été rajoutés sur le graphe.




1. <u>Déterminer le plus court chemin en minutes, reliant la gare B à la gare G. Justifier la réponse grâce à un algorithme.</u>

   Pour cela, on utilise l'algorithme de Dijkstra

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ∞ | 0 | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ |
| B : 0 | 4(B) | | 7(B) | 18(B) | 21(B) | ∞ | ∞ |
| A : 4 | | | 7(B) | 18(B) | 21(B) | ∞ | ∞ |
| C : 7 | | | | 17(C) | 21(B) | 32(C) | ∞ |
| D : 17 | | | | | 21(B) | 29(D) | 48(D) |
| E : 21 | | | | | | 29(D) | 38(E) |
| F : 29 | | | | | | | 36 (F) |

Le sommet G étant marqué, pour lire la chaîne de poids minimal, on part de G et on "remonte" la chaîne en suivant les prédécesseurs. $G \leftarrow F \leftarrow D \leftarrow C \leftarrow B.$

Le plus court chemin en minutes, reliant la gare B à la gare G est B-C-D-F-G.

2. <u>Quelle est la longueur en minutes de ce chemin ?</u>

La longueur en minutes du chemin B-C-D-F-G est de 36 minutes.

**Exercice 2 :** Livre p 261 n° 46

Entre deux retours à la surface pour respirer, la profondeur d'une tortue de mer est modélisée par la courbe d'équation $y = a\,t^4 + bt^3 + ct^2 + dt$ où y désigne la profondeur en m et t le temps en min.

1. Traduire chacune des phrases ci-dessous par une équation utilisant a, b , c ou d

   Soit $p(t) = a\,t^4 + bt^3 + ct^2 + dt$

   - *La tortue a plongé 10 minutes entre des deux respirations*

$$p(10) = 0$$
$$a \times 10^4 + b\times 10^3 + c\times 10^2 + d\times 10 = 0$$
$$\mathbf{10\,000\,a + 1\,000b + 100\,c + 10\,d = 0}$$

   - *Au bout d'1 min, elle se trouvait à 51,75 m de profondeur*

$$p(1) = 51{,}75$$
$$a \times 1^4 + b\times 1^3 + c\times 1^2 + d\times 1 = 51{,}75$$
$$\mathbf{a + b + c + d = 51{,}75}$$

   - *Elle a atteint sa profondeur maximale une première fois au bout de 2 minutes*

$$p'(2) = 0$$
$$\text{or } p(t) = a\,t^4 + bt^3 + ct^2 + dt \text{ donc } p'(t) = 4a\,t^3 + 3bt^2 + 2\,ct + d$$
$$4a \times 2^3 + 3b\times 2^2 + 2c\times 2 + d = 0$$
$$\mathbf{32\,a + 12b + 4\,c + d = 0}$$

   - *Elle a atteint sa profondeur maximale une seconde fois au bout de 8 minutes*

$$p'(8) = 0$$
$$4a \times 8^3 + 3b\times 8^2 + 2c\times 8 + d = 0$$
$$\mathbf{2048\,a + 48b + 16\,c + d = 0}$$

2. a) Montrer que le système constitué des quatre équations précédentes est équivalent à A × X = B où A, B et X sont des matrices à préciser.

$$(S)\begin{cases} 10\,000a + 1\,000b + 100c + 10d = 0 \\ a + b + c + d = 51{,}75 \\ 32a + 12b + 4c + d = 0 \\ 2\,048a + 192b + 16c + d = 0 \end{cases}$$

est équivalent à l'équation matricielle $A \times X = B$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 10\,000 & 1\,000 & 100 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 32 & 12 & 4 & 1 \\ 2\,048 & 192 & 16 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \quad \text{et } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 51{,}75 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   b) Résoudre cette équation matricielle en utilisant la calculatrice

$$A \times X = B$$

D'après la calculatrice A est inversible donc $A^{-1} \times (A \times X) = A^{-1} \times B$

$$(A^{-1} \times A) \times X = A^{-1} \times B$$
$$I_4 \times X = A^{-1} \times B$$
$$X = A^{-1} \times B$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{0,25} \\ \mathbf{-5} \\ \mathbf{33} \\ \mathbf{-80} \end{pmatrix}$$

Ainsi, on a pour tout t de [ 0;10]  $p(t) = 0,25\,t^4 - 5t^3 + 33t^2 - 80t$

c) <u>Jusqu'à quelle profondeur la tortue est-elle descendue ?</u>

Il s'agit de trouver la valeur du maximum : p(2) et celle de p(8)
On remarque que $p(2) = p(8) = -64$
**La tortue est donc descendue jusqu'à 64 m de profondeur**