TES/Spé TL Eléments de correction de divers exercices d'applications

Ch P1 : Probabilités conditionnelles

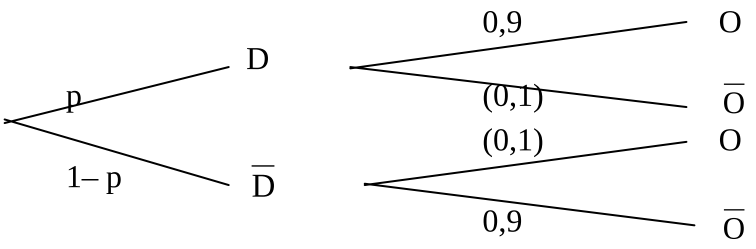
<u>Exercice</u>

À l'issue d'une compétition, des sportifs sont contrôlés par un comité anti-dopage qui doit se prononcer sur leur positivité ou négativité au dopage.
Le test dont dispose le comité est fiable à 90 %. Cela signifie que la probabilité qu'un sportif dopé soit déclaré positif est 90 % et que la probabilité qu'un sportif non dopé soit déclaré négatif est 90 %.
On choisit un sportif au hasard et on note :

- D l'événement : « Le sportif est dopé » ;
- O l'événement : « Le sportif est déclaré positif » ;
- C l'événement : « Le comité a commis une erreur » ;
- *p* la fréquence des dopés parmi les sportifs contrôlés.

1. <u>Déclaré positif</u>

a) <u>Arbre pondéré</u>



b) <u>Expression de l'événement C en fonction des événements D et O</u>

C : « le comité a commis une erreur : **$C = (D \cap O) \cup (\overline{D} \cap O)$**

<u>Probabilité de C :</u>

C est la réunion de deux événements incompatibles donc :

$P(C) = P(D \cap \overline{O}) + P(\overline{D} \cap O)$

$P(C) = P(D) \times P_D(\overline{O}) + P(\overline{D}) \times p_{\overline{D}}(O)$

$P(C) = p \times 0,1 + (1 - p) \times 0,1 = 0,1$

la probabilité que le comité ait commis une erreur est de 0,1

c) Probabilité que le sportif choisi soit déclaré positif en fonction de p
On recherche donc P(O)
On sait que **D et $\overline{D}$ forment uen partition de l'univers donc , d'après la formule des probabilités totales, on a :**

$P(O) = P(D \cap O) + P(\overline{D} \cap O)$

$P(O) = P(D) \times P_D(O) + P(\overline{D}) \times p_{\overline{D}}(O)$

$P(O) = p \times 0,9 + (1 - p) \times 0,1 = 0,8p + 0,1$

La probabilité que le sportif choisi soit déclaré positif est égale à 0,8p + 0,1

2. Valeur diagnostic du test

a) Probabilité qu'un sportif ayant été déclaré positif soit réellement dopé

$$f(p) = P_O(D) = \frac{P(D \cap O)}{P(O)} = \frac{P(D) \times P_D(O)}{P(O)} = \frac{p \times 0,9}{0,8p + 0,1} = \mathbf{\frac{0,9p}{0,8p + 0,1}}$$

C'est la valeur diagnostic du test

b) Résoudre $f(p) \geq 0,9$ et interpréter le résultat :

$$\frac{0,9p}{0,8p + 0,1} \geq 0,9$$

Comme $0,8p + 0,1 > 0$, on peut dire que l'inéquation donnée est équivalente à :

$$0,9p \geq 0,9\,(0,8p + 0,1)$$

$$0,9p \geq 0,72p + 0,9$$

$$0,9p - 0,72p \geq 0,9$$

$$0,18p \geq 0,9$$

$$p \geq \frac{0,9}{0,18}$$

$$p \geq 0,5$$

$$\mathbf{S = [\,0,5\,;\,1\,]}$$

La probabilité qu'un sportif déclaré positif soit réellement dopé est supérieure à 0,9 si et seulement s'il y a au moins 50% de dopés parmi ceux qui sont contrôlés !

3. Faux positif, vrai négatif

a) Probabilité d'un faux positif

Probabilité qu'un sportif qui a un test positif soit non dopé : $p_O(\overline{D})$

$$p_O(\overline{D}) = \frac{P(\overline{D} \cap O)}{P(O)} = \frac{P(\overline{D}) \times p_{\overline{D}}(O)}{P(O)} = \frac{(1-p) \times 0,1}{0,8p + 0,1} = \mathbf{\frac{0,1 - 0,1p}{0,8p + 0,1}} = \mathbf{\frac{1 - p}{8p + 1}}$$

b) Probabilité d'un vrai négatif

Probabilité qu'un sportif qui a un test négatif soit non dopé : $p_{\overline{O}}(\overline{D})$

$$p_{\overline{O}}(\overline{D}) = \frac{P(\overline{D} \cap \overline{O})}{P(\overline{O})} = \frac{P(\overline{D}) \times p_{\overline{D}}(\overline{O})}{1 - P(O)} = \frac{(1-p) \times 0,9}{1 - (0,8p + 0,1)} = \frac{0,9 - 0,9p}{1 - 0,8p - 0,1} = \mathbf{\frac{0,9 - 0,9p}{0,9 - 0,8p}}$$

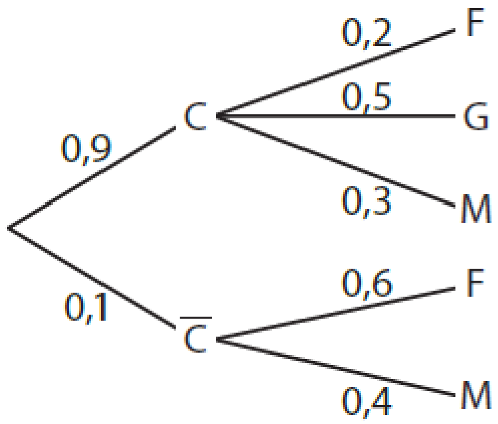
$$= \mathbf{\frac{9 - 9p}{9 - 8p}}$$

		p = 1% = 0,01	p = 10% = 0,1
Probabilité d'un faux positif	$\mathbf{\frac{1-p}{8p+1}}$	$\approx 0,91666667$ $\approx 0,92$	0,5
Probabilité d'un vrai négatif	$\mathbf{\frac{9-9p}{9-8p}}$	$\approx 0,9988789238$ $\approx 0,999$	$\approx 0,987804878$ $\approx 0,988$

Pour vous entraîner personnellement : **problèmes de synthèse**

p 186 n° 57 : élémenst de correction (rédaction non détaillée)

1.



2. a) $P_C(A) = 0{,}2$

b) $P_{\overline{C}}(M) = 0{,}4$

3. $P(F) = 0{,}9 \times 0{,}2 + 0{,}1 \times 0{,}6 = 0{,}24$

4. $P_F(C) = \dfrac{P(F \cap C)}{P(F)} = \dfrac{0{,}9 \times 0{,}2}{0{,}24} = \dfrac{3}{4}$

5. a. $P(X = 5) = P(C) = 0{,}9$

$P(X = 2) = P(\overline{C} \cap F) = 0{,}1 \times 0{,}6 = 0{,}06$

$P(X = 3) = P(\overline{C} \cap M) = 0{,}1 \times 0{,}4 = 0{,}04$

x_i	5	2	3
P_i	0,9	0,06	0,04

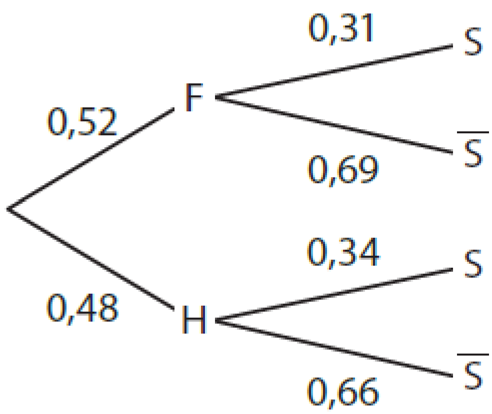
b) $E(X) = 4{,}74$

c) $150 \times 4{,}74 = 711$

Il peut espérer gagner 711 €.

et p 188 n°66

1.



2. $P(H \cap S) = 0{,}48 \times 0{,}34 = 0{,}163\,2$

3. $P(S) = 0{,}52 \times 0{,}31 + 0{,}1632 = 0{,}324\,4$

4. $P_S(F) = \dfrac{P(S \cap F)}{P(S)} = \dfrac{0{,}52 \times 0{,}31}{0{,}324\,4} \approx 0{,}497$

5. Le nombre X de réponses en faveur d'un système social européen suit la loi $\mathcal{B}(3\,;0{,}324\,4)$.

$$P(X = 2) + P(X = 3) = \binom{3}{2} 0{,}324\,4^2 \times 0{,}675\,6 + \binom{3}{3} 0{,}324\,4^3$$

$$\approx 0{,}247$$

Ch S1 : Suites

Exercice

Dans le cadre de leurs TPE (travaux personnels encadrés), deux lycéens de première souhaitent étudier l'évolution de la population de grenouilles dans l'étang de leur commune.
Selon le club des écologistes de cette commune, cette population serait en voie de disparition et les membres de ce club s'en inquiètent. Pour effectuer leur étude, les deux lycéens ne disposent d'abord que des deux relevés suivants effectués par le club :

Date de relevé	1er novembre 2 002	1er novembre 2 003
Population de grenouilles	1 000	950
Rang *n* de l'année	0	1

Pour faire des prévisions, les deux lycéens modélisent l'évolution de la population de grenouilles à l'aide d'une suite.

Partie A

Les deux lycéens font l'hypothèse qu'une suite arithmétique permet de modéliser l'évolution de la population de grenouilles.
Ils notent cette suite (u_n) où u_0 est la population de grenouilles le 1er novembre 2 002.
Plus généralement, u_n est la population de grenouille le 1er novembre (2002 + *n*).

1. Calculons la raison *a* de cette suite.

   On sait que (u_n) est une suite arithmétique donc sa raison a est telle que $a = u_1 - u_0 = 950 - 1000 = -50$

2. Selon ce modèle, déterminons la population de grenouilles le 1er novembre (2002 + *n*) ?

   la population de grenouilles le 1er novembre (2002 + *n*) est $\boxed{u_n = u_0 + n\,a = 1\,000 - 50\,n}$

3. Déterminons l'année où la population de grenouilles aura totalement disparu selon ce modèle.

   Il s'agit de trouver le plus petit entier *n* tel que $u_n \leq 0$

   $$1\,000 - 50\,n \leq 0$$

   $$-50\,n \leq -1\,000$$

   $$n \geq 20$$

   Selon ce modèle, la population de grenouilles aura disparu à partir de 2022

4. Les deux lycéens reçoivent le relevé effectué le 1er novembre 2 004 : 903 grenouilles.
   Est-ce que ce nouveau résultat confirme leur hypothèse ?

   Le nombre de grenouilles le 1er novembre 2 004 est u_2 or, $u_2 = 1\,000 - 50 \times 2 = 900$

   donc moins que ce qui a été relevé (903 grenouilles).

Partie B

Poursuivant leur réflexion, les deux lycéens font l'hypothèse que la population de grenouilles diminue de 5% par an.

1. Vérifier que cette hypothèse respecte les informations relevées dans le tableau de l'énoncé.

   Première méthode : $1000 - \dfrac{5}{100} \times 1000 = 950$

   Seconde méthode : $\dfrac{VF - VI}{VI} \times 100 = \dfrac{950 - 1000}{1000} \times 100 = -5$ d'où $\boxed{\textbf{une diminution de 5\% entre 2002 et 2003}}$

2. Soit v_n la population de grenouilles le 1er novembre (2002 + n) selon cette nouvelle hypothèse.

   a) Déterminons la nature de cette suite (v_n).

   La population de grenouilles diminue de 5% par an donc $v_{n+1} = v_n \times 0{,}95$

   On en déduit que $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est une suite géométrique de raison } 0{,}95}$ (b = 0, 95)

   b) Pour tout entier naturel n, écrivons v_n en fonction de n.

   La suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95 et , de plus, son premier terme est v_0 vérifiant $v_0 = 1\ 000$

   On en déduit que, pour tout entier naturel n, $\boxed{v_n = v_0\ b^n = 1\ 000 \times 0{,}95^n}$

   c) Cherchons, quelle serait alors, à l'entier près, la population de grenouilles le 1er novembre 2 015 ?

   On cherche donc v_{13} . Or $v_{13} = 1\ 000 \times 0{,}95^{13} \approx 513$

   $\boxed{\text{la population de grenouilles le 1er novembre 2 015 est d'environ 513 grenouilles}}$

   d) Les deux lycéens se demandent aussi à partir de quelle date la population de grenouilles de l'étang serait réduite à moins de dix grenouilles.

   Répondons à cette question en s'aidant de la calculatrice et en donnant les résultats qui permettent de conclure.

   On cherche le plus petit entier naturel n tel que $v_n < 10$

   En utilisant la calculatrice, on trouve : $v_{89} \approx 10{,}41$ donc $v_{89} > 10$

   $v_{90} \approx 9{,}89$ donc $v_{90} < 10$

   on en déduit que le plus petit entier naturel n tel que $v_n < 10$ est égal à 90 ; ce qui signifie que

   $\boxed{\text{la population de grenouilles de l'étang serait réduite à moins de dix grenouilles le 1er novembre 2 092}}$

Exercice 1 : Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x^3-x+2}{x^2+1}$.

1. On note f' la dérivée de la fonction f, calculer $f'(x)$.
2. On admet que $f'(x)\geq 0$ équivaut à $x\in [\,1\,;+\infty\,[$
   a. Donner le tableau complet des variations de la fonction f.
   b. Montrer que l'équation $f(x)=3$, admet une solution unique α. Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.

On note f' la dérivée de la fonction f, calculer $f'(x)$.

La fonction f est dérivable comme quotient de deux fonctions dérivables.

$$f=\frac{u}{v} \text{ d'où } f'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

Avec u et v fonctions définies sur $[0;+\infty[$ par :

$$u(x)=x^3-x+2 \quad \text{d'où} \quad u'(x)=3x^2-1$$

$$\text{et} \quad v(x)=x^2+1 \quad \text{d'où} \quad v'(x)=2x$$

Donc pour tout réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2-1)\times(x^2+1)-2x(x^3-x+2)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{3x^4+3x^2-x^2-1-2x^4+2x^2-4x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{x^4+4x^2-4x-1}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

Ainsi, f' est la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par
$f'(x)=\dfrac{x^4+4x^2-4x-1}{(x^2+1)^2}$.

On admet que $f'(x)\geqslant 0$ équivaut à $x\in[1;+\infty[$

a. Donner le tableau complet des variations de f.

Nous avons

$$f(0)=2 \quad \text{et} \quad f(1)=\frac{1^3-1+2}{1^2+1}=1$$

D'autre part, les variations de f, se déduisent du signe de la dérivée f'.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	↘	1	↗	$+\infty$

b. Montrer que l'équation $f(x)=3$ admet une solution unique α. Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.

La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ donc continue sur $[0;+\infty[$.

D'après le tableau de variation de la fonction f, pour tout réel $0 \leqslant x \leqslant 1$, $f(x) \leqslant 2$ donc l'équation $f(x)=3$ n'a pas de solution sur l'intervalle $[0;1]$.

D'autre part, la fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$, à valeurs dans l'intervalle $[1;+\infty[$, alors d'après le théorème de la valeur intermédiaire, l'équation $f(x)=3$ admet une solution unique α avec $\alpha > 1$.

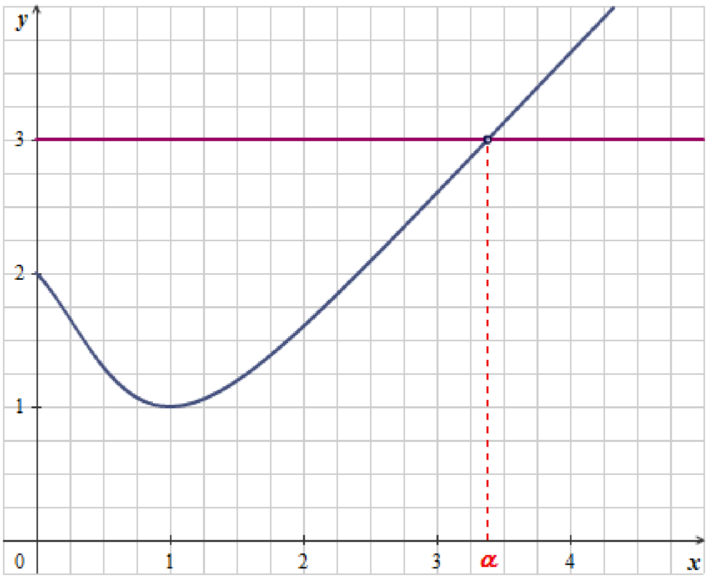
À l'aide de la calculatrice, on détermine des encadrements successifs de α jusqu'à obtenir un encadrement d'amplitude 10^{-2} :

$$f(3)<3 \quad \text{et} \quad f(4)>3 \quad \text{d'où} \quad 3<\alpha<4$$

$$f(3{,}3)<3 \quad \text{et} \quad f(3{,}4)>3 \quad \text{d'où} \quad 3{,}3<\alpha<3{,}4$$

$$f(3{,}38)<3 \quad \text{et} \quad f(3{,}39)>3 \quad \text{d'où} \quad 3{,}38<\alpha<3{,}39$$

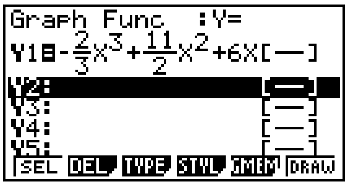
L'équation $f(x)=3$ admet une solution unique α avec $3{,}38<\alpha<3{,}39$.

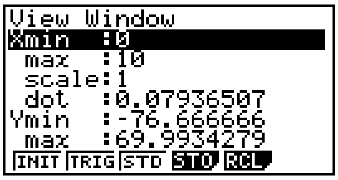


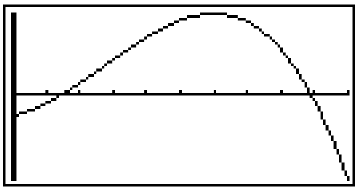
Exercice 2 : **Rentabilité d'une activité :** livre p 82 n°84

1. Conjectures

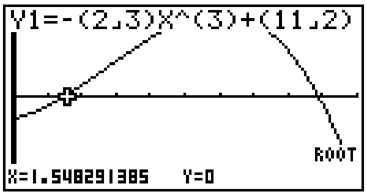
a) Représentation graphique de B

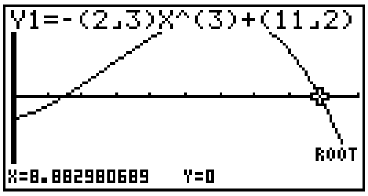






b) Pour quelles ventes d'objets l'activité de l'entreprise est rentable ?





L'activité de l'entreprise semble rentable entre 1, 549 milliers d'unités et 8,882 milliers d'unités, soit entre 1549 et 8882 objets.

2. a) B est dérivable sur [0 ;10] et $B'(x) = -2x^2 + 11x + 6$

on cherche ensuite le signe de $B'(x)$ qui est un trinôme du second degré

$\Delta = (11)^2 - 4 \times (-2) \times (6) = 169$

$\Delta > 0$ donc deux racines distinctes

$x_1 = \dfrac{-11+13}{2\times(-2)} = -0{,}5$ et $x_2 = \dfrac{-11-13}{2\times(-2)} = 6$

$\Delta > 0$ et $a < 0$ d'où

x	0		6		10
Signe de $B'(x)$		+	0	–	
Variation de B	-20	↗	70	↘	$\dfrac{-230}{3}$

b) Montrer que l'équation $B(x) = 0$ a deux solutions x_1 et x_2 dans [0 ; 10]

- La fonction B est continue sur [0 ; 6]
  La fonction B est strictement croissante sur [0 ; 6]
  Zéro est compris entre B(0) et B(6) car $B(0) = -20$ et $B(6) = 70$
  Donc, d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $B(x) = 0$ admet une unique solution x_1 dans [0 ; 6]

- La fonction B est continue sur [6 ; 10]
  La fonction B est strictement décroissante sur [6 ; 10]
  Zéro est compris entre B(6) et B(10) car $B(6) = 70$ et $B(10) = \dfrac{-230}{3}$
  Donc, d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $B(x) = 0$ admet une unique solution x_2 dans [6 ; 10]

- **En conclusion, l'équation $B(x) = 0$ a deux solutions x_1 et x_2 dans [0 ; 10]**

c) Déterminer une valeur approchée de x_1 et x_2 à 10^{-3}

A l'aide de la calculatrice (solveur graphique puis racines), on obtient :

$x_1 \approx 1{,}549$ et $x_2 \approx 8{,}882$.

d) En déduire, à l'unité près, la quantité minimale et la quantité maximale, que l'entreprise doit vendre pour que son activité soit rentable

x	0		x_1		6		x_2		10
Variation de B	-20	↗	0	↗	70	↘	0	↘	$-\frac{230}{3}$
Signe de B(x)		$-$	0		$+$		0	$-$	

L'entreprise est rentable lorsque B(x) ≥ 0, c'est-à-dire lorsque x appartient à $]x_1 \,;\, x_2[$

Vu les valeurs approchées de x_1 et x_2 à 10^{-3} trouvées précédemment, on en déduit que :

L'entreprise doit produire au minimum 1 549 unités et au maximum 8 882 unités pour que son activité soit rentable

e) Déterminer la quantité d'objets à vendre pour que le bénéfice soit maximal. Quel est ce bénéfice maximal ?

Le bénéfice est maximal pour x = 6, c'est-à-dire pour 6 000 objets vendus.

Le bénéfice maximal est, en milliers d'euros, B(6) = 70

Le bénéfice maximal est donc de 70 000 euros.