1S | Le 19 septembre 2014

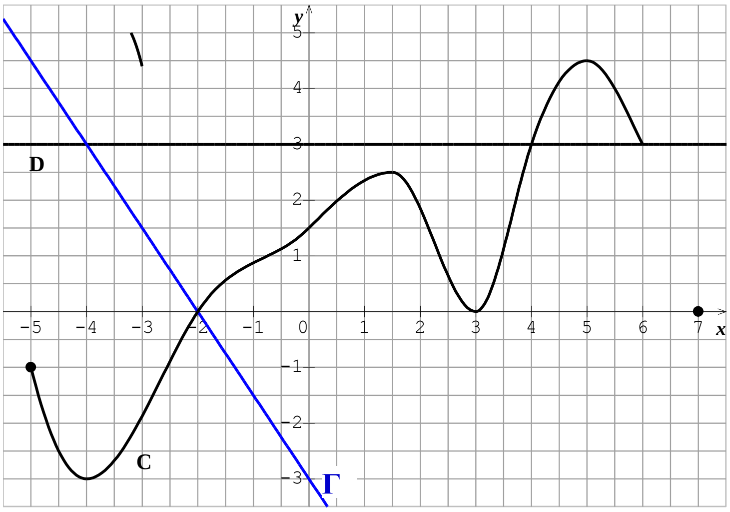
Corrigé du D.S de Mathématiques n°1

Calculatrice autorisée
Durée : 1 h 45

Le barème est donné à titre indicatif sur 50

EXERCICE 1 (16 points) A COMPLÉTER SUR L'ÉNONCÉ

La courbe (C) ci-contre est la courbe représentative d'une fonction f, et (D) est la droite d'équation $y = 3$.



1) Déterminer graphiquement l'ensemble de définition de f. **$Df = [-5 ; 7]$**

2) Déterminer graphiquement l'image de 1,5 par la fonction f. **L'image de 1,5 par *f* vaut 2,5**

3) Déterminer les éventuels antécédents de 0 par la fonction f. **Les antécédents de 0 par *f* sont – 2 ; 3 et 7.**

4) Résoudre graphiquement l'équation :

$f(x) = 3$. **S = {4 ; 6}**

5) Déterminer graphiquement $f(0)$ = **1,5**

6) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < 3$. **S = [– 5 ; 4[∪]6 ; 7]**

7) Déterminer graphiquement le maximum de f. Pour quelle valeur de x est-il atteint ?

Le maximum de *f* vaut 4,5. Il est atteint pour *x* = 5.

8) Compléter le tableau de variations de la fonction f.

x	– 5	– 4	1,5	3	5	7
Variations de la fonction f	– 1 ↘	– 3 ↗	2,5 ↘	0 ↗	4,5 ↘	0

9) Compléter le tableau de signes de $f(x)$.

x	– 5		– 2		3		7
Signe de $f(x)$		–	0	+	0	+	0

10) Tracer dans le repère ci-dessus la courbe (Γ) représentant la fonction g, telle que : $g(x) = -\frac{3}{2}x - 3$

11) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) \geq g(x)$. **S = [– 2 ; 7]**

12) Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection de (D) et de (Γ).

D : $y = 3$ et Γ : $y = -\frac{3}{2}x - 3$. Soit A le point d'intersection de D et Γ.

On peut résoudre le système $\begin{cases} y_A = 3 \\ y_A = -\frac{3}{2}x_A - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_A = 3 \\ 3 = -\frac{3}{2}x_A - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_A = 3 \\ \frac{3}{2}x_A = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_A = 3 \\ x_A = -6 \times \frac{2}{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y_A = 3 \\ x_A = -4 \end{cases}$ **Le point A d'intersection de D et Γ a pour coordonnées (– 4 ; 3).**

EXERCICE 2 (13 points)

1) Soit la fonction carré.

a) Quel nom porte sa représentation graphique ?

La représentation graphique de la fonction carré est **une parabole** de sommet O.

b) Quelle propriété possède la fonction carré ?

La courbe représentative de la fonction carré est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Les images de x et $-x$ par la fonction carré sont égales.

On dit que la fonction carré est paire.

c) Dresser son tableau de variations.

x	$-\infty$	$\mathbf{0}$	$+\infty$
Variations de la fonction carré	$\searrow$	$\mathbf{0}$	$\nearrow$

2) Soit la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -3x^2 + 12x - 21$.

a) Calculer, en détaillant les calculs : $f(-2)$.

$f(-2) = -3 \times (-2)^2 + 12 \times (-2) - 21$

$= -3 \times 4 - 24 - 21$

$= -12 - 45$

$\mathbf{f(-2) = -57}$

b) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = -3(x-2)^2 - 9$.

$\mathbf{-3(x-2)^2 - 9} = -3(x^2 - 4x + 4) - 9$

$= -3x^2 + 12x - 12 - 9$

$\mathbf{= -3x^2 + 12x - 21}$

$\mathbf{= f(x)}$

c) En déduire les coordonnées du sommet de la courbe représentative de la fonction f.

Lorsque l'expression d'une fonction polynôme du second degré est donnée sous forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, les coordonnées du sommet de la parabole représentative de la fonction f sont $(\alpha ; \beta)$.

Ici $f(x) = -3(x-2)^2 - 9$ donc $\alpha = 2$ et $\beta = -9$.

Les coordonnées du sommet de la courbe représentative de la fonction f sont donc (2 ;– 9)

3) Soit la fonction g, définie par : $g(x) = \dfrac{5x+9}{3x-6}$.

a) Donner l'ensemble de définition de la fonction g.

Cherchons la valeur interdite : $3x - 6 = 0 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = \dfrac{6}{3} = 2$

$\mathbf{D_g = \mathbb{R} - \{2\} =]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[}$

b) Quel nom porte la courbe représentant la fonction g ?

$g(x)$ est sous la forme $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ avec $c \neq 0$ et $ab - bc \neq 0$ donc g est une fonction homographique.

Sa représentation graphique est donc **une hyperbole**.

c) Calculer, en détaillant les calculs : $g\left(-\dfrac{1}{6}\right)$.

$$\mathbf{g\left(-\frac{1}{6}\right)} = \frac{5 \times \left(-\frac{1}{6}\right) + 9}{3 \times \left(-\frac{1}{6}\right) - 6} = \frac{-\frac{5}{6} + \frac{54}{6}}{-\frac{3}{6} - \frac{36}{6}} = \frac{\frac{49}{6}}{-\frac{39}{6}} = -\frac{49}{6} \times \frac{6}{39} = \mathbf{-\frac{49}{39}}$$

4) Soit la fonction h, dont la représentation graphique est la courbe d'équation : $y = 5x - 1$.

a) A quel type de fonctions appartient la fonction h ?

h(x) est de la forme ax + b avec a = 5 et b = –1 donc **h est une fonction affine**

b) Déterminer le sens de variation de la fonction h.

a = 5, a > 0 donc **h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$**.

c) Résoudre l'équation h (x) = 0.

$$\begin{aligned} h(x) = 0 &\Leftrightarrow 5x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 5x = 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\mathbf{S} = \left\{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\right\}$$

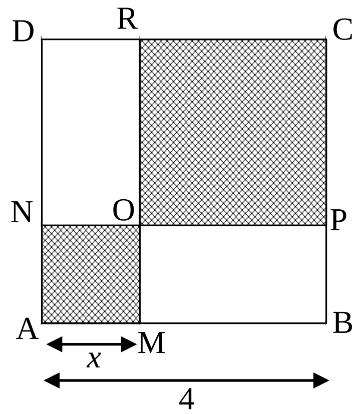
d) Interpréter graphiquement ce résultat.

La droite représentative de la fonction h coupe l'axe des abscisses en $x = \frac{1}{5}$

e) Dresser le tableau de signes de h (x).

x	$-\infty$		$\frac{1}{5}$		$+\infty$
Signe de h(x)		–	**0**	+	

EXERCICE 3 (11 points)



Sur la figure ci-contre, ABCD est un carré de côté 4, M est un point mobile du segment [AB] et AMON et OPCR sont des carrés.

On note x la longueur AM et f (x) l'aire du domaine hachuré.

1) A quel intervalle appartient la variable x ? Qu'en déduit-on pour la fonction f ?

Comme M est un point mobile sur le segment [AB], la plus petite longueur possible pour AM est 0 et la plus grande longueur possible pour AM est 4. Par conséquent, $\boldsymbol{x \in [0\ ;\ 4]}$. On en déduit que **l'ensemble de définition de la fonction f est [0 ; 4]**.

2) En calculant l'aire hachurée en fonction de x, montrer que :

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 16$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{aire de AMON} + \text{aire de OPCR} \\ &= x^2 + (4 - x)^2 \\ &= x^2 + 16 - 8x + x^2 \end{aligned}$$

$$\mathbf{f(x) = 2x^2 - 8x + 16}$$

3) Trouver deux nombres x_1 et x_2 ayant la même image par la fonction f.

Que peut-on en déduire pour la fonction f ?

f est une fonction polynôme du second degré.

f (x) est sous forme développée (ax^2 + bx + c), résolvons f (x) = c, c'est-à-dire f (x) = 16.

$$\begin{aligned} f(x) = 16 &\Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 16 = 16 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 8x = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x(x - 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x = 0 \text{ ou } x - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 4 \end{aligned}$$

Donc 0 et 4 ont la même image (16) par la fonction f.

On peut en déduire l'abscisse du sommet S de la parabole repésentative de f

$$x_S = \frac{\mathbf{0+4}}{\mathbf{2}} = \mathbf{2} \qquad \text{et} \qquad y_S = \mathbf{f}\,(x_S) = \mathbf{f}\,(\mathbf{2}) = \mathbf{2 \times 2^2 - 8 \times 2 + 16 = 8}$$

Le sommet de la parabole a pour coordonnées (2 ; 8)

4) Justifier les variations de la fonction f, puis dresser son tableau de variation.

a = 2, **a** > **0** donc f est stritement croissante sur [0 ; 2] et strictement croissante sur [2 ; + ∞[.

x	**0**	**2**	**4**
Variations de f	**16** ↘	**8** ↗	**16**

5) Pour quelle position du point M l'aire hachurée est-elle minimale ?

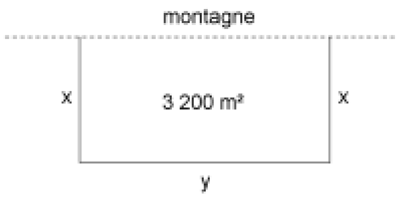
L'aire hachurée est minimale lorsque $x = 2$, c'est-à-dire lorsque **M est situé au milieu du segment [AB]**.

6) Peut-on trouver une valeur de x telle que l'aire hachurée soit égale à 6.

Le minimum de la fonction f étant 8, **il n'existe pas de valeur de x telle que f (x) = 6**

EXERCICE 4 (10 points)

Un éleveur souhaite aménager pour ses moutons un enclos rectangulaire de 3 200 m² contre une paroi abrupte de la montagne. Il veut déterminer les dimensions qu'il doit donner à cet enclos pour que la longueur totale de la clôture soit minimale. On désigne la largeur de cet enclos par x, en mètres, et sa longueur par y, en mètres (la clôture n'est placée que sur deux largeurs et une longueur du fait de la paroi).



1) Exprimer y en fonction de x.

L'aire de l'enclos est de 3200 m², soit : $x \times y = 3\,200$

donc $\boldsymbol{y} = \dfrac{\mathbf{3\,200}}{\boldsymbol{x}}$

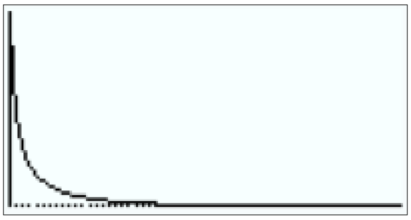
2) Montrer que la longueur totale de la clôture en fonction de x est : $\dfrac{2x^2 + 3\,200}{x}$.

longueur totale de la clôture $= 2x + y = 2x + \dfrac{3\,200}{x} = \dfrac{\mathbf{2}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} \mathbf{+ 3\,200}}{\boldsymbol{x}}$

3) On appelle f la fonction qui, à chaque réel x, fait correspondre la longueur totale de la clôture.

a) Représenter sur la calculatrice cette fonction pour x compris entre 1 et 60. Vous préciserez les réglages utilisés et vous représenterez une allure de la courbe.

Allure de la courbe



Réglages utilisés

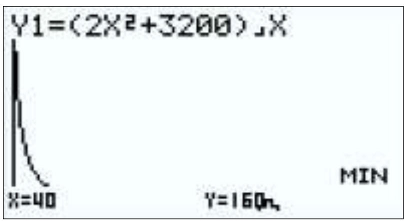
Mode graph :

Xmin = 1

Xmax = 60

+ zoom automatique ou zoom min-max

b) Faire une conjecture sur la valeur x_0 de x qui permet de minimiser la longueur totale de la clôture.



Il semble que le minimum de f sur l'inervalle [1 ; 60] soit atteint pour $\boldsymbol{x_0} = \mathbf{40}$.

c) ***Pour cette question, toute trace de recherche sera valorisée.***

En étudiant le signe de f (x) – f (40), démontrer la conjecture faite à la question précédente.

$$f(40) = \frac{2 \times 40^2 + 3\,200}{40} = 160$$

$$f(x) - f(40) = \frac{2x^2 + 3\,200}{x} - 160$$

$$= \frac{2x^2 + 3\,200 - 160\,x}{x}$$

$$= \frac{2\,(x^2 - 80x + 1\,600)}{x}$$

$$= \frac{2\,(x^2 - 2 \times 40 \times x + 40^2)}{x}$$

$$f(x) - f(40) = \frac{2\,(x-40)^2}{x}$$

x	0		40		$+\infty$
Signe de 2	‖	+	|	+	
Signe de $(x-40)^2$	‖	+	0	+	
Signe de x	‖	+	|	+	
Signe de $\frac{2\,(x-40)^2}{x}$	‖	+	0	+	

On a donc pour tout x strictement positif, f (x) – f (40) ≥ 0 c'est-à-dire f $(x) \geq$ f (40).

Conclusion : Le minimum de la fonction f est f (40) et il est atteint pour $x_0 = 40$.