2nde _ _ **MATHEMATIQUES : éléments de correction du DNS 2**

Objectifs : *Comprendre un programme de calcul et donc savoir l'exécuter.*
Emettre une conjecture, puis la justifier.
Mathématiser une information donnée.
Utiliser les théorèmes de géométrie plane vus au collège

Exercice 1 : Programme de calcul

Voici deux programmes de calcul :

- **Programme 1** :
  Choisir un nombre
  L'élever au carré
  Puis multiplier par l'opposé 3
  Retrancher ensuite 8
  Enfin, ajouter le produit du nombre choisi au départ par 12
  Donner le résultat

- **Programme 2** :
  Choisir un nombre
  Lui retrancher 2
  Prendre le carré du résultat
  Puis multiplier par 3
  Prendre l'opposé
  Enfin, ajouter 4
  Donner le résultat.

1. Pensez-vous que, pour un même nombre pris au départ, ces deux programmes de calcul aboutissent au même résultat ?

Soit x un nombre pris au départ,

Programme 1 :

$$\boxed{x} \xrightarrow{\text{Elever au carré}} \boxed{x^2} \xrightarrow{\text{Multiplier par }(-3)} \boxed{-3x^2} \xrightarrow{\text{Retrancher 8}} \boxed{-3x^2-8} \xrightarrow{\text{Ajouter le produit du nombre choisi au départ par 12}} \boxed{-3x^2-8+12\times x}$$

Le résultat du programme 1 est donc : $-3x^2+12x-8$

Programme 2 :

$$\boxed{x} \xrightarrow{\text{Retrancher 2}} \boxed{x-2} \xrightarrow{\text{Elever au carré}} \boxed{(x-2)^2} \xrightarrow{\text{Multiplier par 3}} \boxed{3(x-2)^2} \xrightarrow{\text{Prendre l'opposé}} \boxed{-3(x-2)^2} \xrightarrow{\text{Ajouter 4}} \boxed{-3(x-2)^2+4}$$

Le résultat du programme 2 est donc : $-3(x-2)^2+4$

<u>en développant :</u> $-3(x-2)^2+4$

$$\begin{aligned} -3(x-2)^2+4 &= -3\,(x^2-4x+4)+4 \\ &= -3x^2+12x-12+4 \\ &= -3x^2+12x-8 \end{aligned}$$

Conclusion : Quelque soit le nombre choisi au départ les deux programmes donnent donc le même résultat

2. Quel(s) est(sont) le(s) nombre(s) de départ qui permet(tent) de trouver comme résultat (final) le nombre « – 21 » ?

Seul le programme 2 peut être pris « à l'envers »

Programme 2

−1 ou 5	−3 ou 3	9	27	− 27	− 23
~~Retrancher 2~~	~~Elever au carré~~	~~Multiplier par 3~~	Prendre l'opposé	~~Ajouter 4~~	
Ajouter 2	**Prendre la racine carrée ou l'opposé de la racine carré**	**Diviser par 3**		**Retrancher 4**	

Autre méthode : résoudre l'équation $-3(x-2)^2+4=-23$

$$-3(x-2)^2+4+23=0$$
$$-3(x-2)^2+27=0$$
$$-3\,[\,(x-2)^2-9]=0$$
$$-3\,[\,(x-2)^2-3^2]=0$$
$$-3\,[\,(x-2)-3]\,[\,(x-2)+3]=0$$

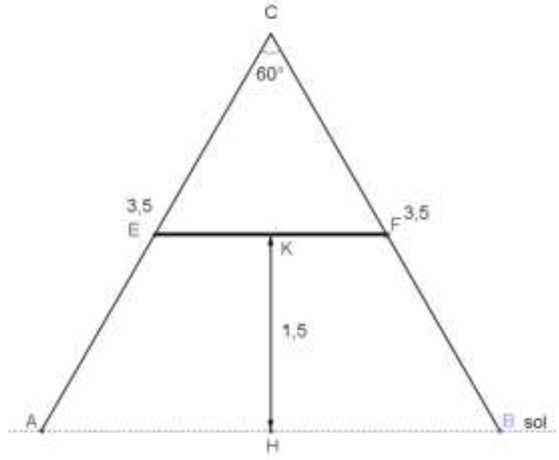
Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul

$$[\,(x-2)-3]=0 \text{ ou } [\,(x-2)+3]=0$$
$$[\,x-2-3]=0 \quad \text{ou } [\,x-2+3]=0$$
$$x-5=0 \quad \text{ou} \quad x+1=0$$
$$x=5 \quad \text{ou} \quad x=-1$$
$$S=\{-1\,;\,5\}$$

Conclusion : Pour obtenir en final le nombre « − 23 », le nombre choisi au départ doit être égal à −1 ou 5.

Exercice 2 :

Guillaume veut construire une balançoire avec un toboggan pour son fils. Il a acheté des rodins de bois de 3,50 mètres pour les poteaux. Au sommet de la balançoire, l'angle formé par deux poteaux vaut 60°.
Pour accéder au toboggan, il doit construire une passerelle située à 1,50 mètres du sol.
Calculer la longueur de la passerelle pour que Guillaume puisse terminer ses achats chez le marchand de bois.



1$^{\text{ère}}$ partie : Montrer que le triangle ABC est équilatéral

AC = BC donc ABC est isocèle en C

Par conséquent, les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ABC}$ à la bases sont égaux

Or $\widehat{BAC}+\widehat{ABC}+\widehat{ACB}=180°$

$\widehat{BAC}+\widehat{ABC}=180°-\widehat{ACB}=120°$

Donc $\widehat{BAC}=\widehat{ABC}=\dfrac{120}{2}=60°$

Conclusion : ABC est équilatéral

2$^{\text{ème}}$ partie : Calcul de la hauteur de la balançoire

Soit H, le pied de la hauteur issue de C dans ABC

Le triangle ABC étant isolèle, une hauteur est aussi une médiatrice.

Donc H est le milieu de [AB] et AH = $\dfrac{3,5}{2}=1,75$

1ère méthode : en utilisant le théorème de Pythagore

Dans le triangle AHC rectangle en C, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$AH^2 + HC^2 = AC^2$

$HC^2 = AC^2 - AH^2$

$= 3{,}5^2 - 1{,}75^2$

$= 9{,}1875$

$HC = \sqrt{9{,}1875} = \dfrac{7\sqrt{3}}{4}$

2ème méthode : en utilisant la trigonométrie

Dans le triangle AHC rectangle en C, $\sin \widehat{CAH} = \dfrac{HC}{AC}$

$\sin 60 = \dfrac{HC}{3{,}5}$ donc $HC = 3{,}5 \sin(60°) = \dfrac{7\sqrt{3}}{4}$

3ème partie : Calcul de EK

Les triangles CEK et CAH sont tels que :

- Les points C, E et A sont alignés et distincts deux à deux
- Les points C, K et H sont alignés et distincts deux à deux
- (EK) // (AH)

D'après le théorème de Thalès, on a : $\dfrac{EK}{AH} = \dfrac{CK}{CH}$ c'est-à-dire $\dfrac{EK}{1{,}75} = \dfrac{CH - HK}{\dfrac{7\sqrt{3}}{4}}$ d'où $\dfrac{EK}{1{,}75} = \dfrac{\dfrac{7\sqrt{3}}{4} - 1{,}5}{\dfrac{7\sqrt{3}}{4}}$

Donc $EK = 1{,}75 \times \dfrac{\dfrac{7\sqrt{3}}{4} - 1{,}5}{\dfrac{7\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{7}{4} \times \left(\dfrac{7\sqrt{3}}{4} - \dfrac{3}{2}\right) \times \dfrac{4}{7\sqrt{3}} = \dfrac{7\sqrt{3} - 6}{4} \times \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{7\sqrt{3} - 6}{4\sqrt{3}}$

$EF = 2 \times EK = \dfrac{7\sqrt{3} - 6}{2\sqrt{3}} \simeq 1{,}768$

Conclusion : La longueur de la passerelle est d'environ 1,768 mètres