TES **Corrigé du D.S. n°2 du Vendredi 10 Octobre 2014** **1h15min**

Le barème est donné à titre indicatif sur 30

EXERCICE 1 (10 *points*) PROBABILITÉS.

Un site de vente par correspondance propose 2 400 jeux vidéo dont 54 % sont des jeux pour console, le reste étant des jeux pour ordinateur.

Un tiers des jeux pour console sont des jeux d'action et 25 % des jeux pour ordinateur sont aussi des jeux d'action. On choisit au hasard un jeu proposé par le site. On définit les événements :

- C : « le jeu est un jeu pour console » ;
- O : « le jeu est un jeu pour ordinateur » ;
- A : « le jeu est un jeu d'action ».

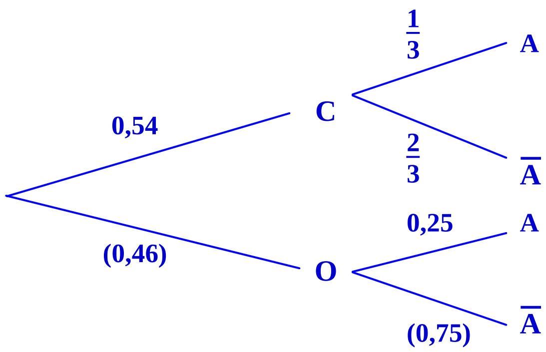
1. En utilisant les informations de l'énoncé, donner la valeur des probabilités $p(C)$, $p_O(A)$ et $p_C(A)$.

54 % sont des jeux pour console donc $\mathbf{p(C) = 0,54}$

Un tiers des jeux pour console sont des jeux d'action donc $\mathbf{p_C(A) = \frac{1}{3}}$

25 % des jeux pour ordinateur sont aussi des jeux d'action donc $\mathbf{p_O(A) = 0,25}$

2. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.



3. Calculer $p(A \cap C)$. Interpréter cette probabilité.

$$\mathbf{p(A \cap C)} = p(C) \times p_C(A) = 0,54 \times \frac{1}{3} = \mathbf{0,18}$$

La probabilité que le jeu choisi soit un jeu d'action pour console est de 0,18

4. Déterminer la probabilité que le jeu choisi soit un jeu d'action.

C et O forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales on a :

$p(A) = p(A \cap C) + p(O \cap C)$

$p(C) = 0,18 + p(O) \times p_O(A)$

$p(C) = 0,18 + 0,46 \times 0,25$

$p(C) = 0,18 + 0,115$

$\mathbf{p(C) = 0,295}$

La probabilité que le jeu choisi soit un jeu d'action est de 0,295.

5. Un client du site a choisi un jeu d'action. Quelle est la probabilité que ce soit un jeu pour console ?

On cherche la probabilité de C sachant A :

$$\mathbf{p_A(C) = \frac{p(A \cap C)}{p(A)} = \frac{0,18}{0,295}} \qquad \mathbf{p_A(C) = \frac{36}{59}\ (\approx 0,610)}$$

Un client du site a choisi un jeu d'action. La probabilité que ce soit un jeu pour console est de $\frac{36}{59}$.

EXERCICE 2 (*7 points*) **FONCTION DE SATISFACTION.**

On mesure la satisfaction des consommateurs par une « fonction de satisfaction » *f*, à valeurs dans l'intervalle [0 ; 100]. La satisfaction vaut 0 lorsque les consommateurs ne sont pas satisfaits et vaut 100 lorsque les consommateurs sont pleinement satisfaits : on parle alors de « saturation ».

On définit la fonction « envie » *v* comme étant la dérivée de la fonction *f*.

On a donc $v = f'$.

On dit qu'il y a « envie » lorsque *v* est positive. Sinon on dit qu'il y a « rejet ».

Une agence de voyages propose différents types de formules pour les vacances et décide d'étudier la satisfaction de ses clients concernant la durée en jours d'une croisière.

La fonction de satisfaction *f* est définie sur l'intervalle [0 ; 21] par :

$$f(x) = 0{,}02\,x^3 - 1{,}4\,x^2 + 22\,x$$

où *x* est la durée, en jour, de la croisière.

1. Calculer $f'(x)$, puis en étudier le signe sur [0 ; 21].

$f'(x) = 0{,}02 \times 3\,x^2 - 1{,}4 \times 2\,x + 22 = \mathbf{0{,}06\,x^2 - 2{,}8\,x + 22}$

$f'(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = 0{,}06$; $b = -2{,}8$; $c = 22$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2{,}8)^2 - 4 \times (0{,}06) \times (22) = 7{,}84 - 5{,}28 = 2{,}56$

$\Delta > 0$ donc ce trinôme du second degré admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2{,}8+\sqrt{2{,}56}}{2 \times 0{,}06} = \frac{2{,}8+1{,}6}{0{,}12} = \frac{4{,}4}{0{,}12} = \mathbf{\frac{110}{3}} \approx \mathbf{36{,}7}$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2{,}8-\sqrt{2{,}56}}{2 \times 0{,}06} = \frac{2{,}8-1{,}6}{0{,}12} = \frac{1{,}2}{0{,}12} = \mathbf{10}$$

$a = 0{,}06$ donc $a > 0$

x	0		10		21
Signe de $f'(x)$		+	0	–	

2. Dresser le tableau de variations de *f* sur [0 ; 21].

x	0		10		21
Signe de $f'(x)$		+	0	–	
Variation de *f*	0	↗	100	↘	29,82

3. a. Quelle doit être la durée, en jour, de la croisière pour qu'il y ait saturation ?

Il y a saturation lorsque les consommateurs sont pleinement satisfaits, c'est-à-dire lorsque $f(x) = 100$; ce qui correspond au maximum de *f* sur [0 ; 21].

D'après le tableau de variation, ce maximum est atteint pour $x = 10$.

On en conclut que la saturation est atteinte au bout de 10 jours.

b. Sur quel(s) intervalle(s) y a-t-il envie ? Sur quel(s) intervalle(s) y a-t-il rejet ?

On dit qu'il y a « envie » lorsque *v* est positive, avec $v = f'$.

D'après le signe de f', il y a donc envie lorsque *x* appartient à [0 ; 10[.

De la même façon, il y a rejet lorsque f' est négative donc sur]10 ; 21].

EXERCICE 3 (4 *points*) SUITE.

Alain a obtenu un prêt progressif pour financer l'achat d'un terrain.
La première année, il paye des mensualités de 900 €, ensuite ses mensualités augmentent de 1,5 % par an.
La durée de son prêt est de 8 ans.
On note w_n la somme en euros déboursée par Alain au cours de la n-ième année de son prêt.
On a donc $w_1 = 10\,800$.

1. (w_n) est-elle une suite géométrique ? Quelle est sa raison ?

Les mensualités augmentent de 1,5 % par an donc, on a :

$$w_{n+1} = \left(1 + \frac{1,5}{100}\right) w_n = 1,015\, w_n$$

On en déduit que **la suite (w_n) est une suite géométrique de raison b = 1,015.**

De plus $w_1 = 10\,800$,

on a donc pour tout $n \geq 1$ $\quad \boldsymbol{w_n} = w_1 \times b^{n-1} = \mathbf{10\,800 \times 1{,}015^{n-1}}$

2. Quelle est la somme totale remboursée par Alain à la fin de son prêt ?

Il s'agit de calculer : $\mathbf{S} = \boldsymbol{w_1 + w_2 + \ldots + w_8}$

$$S = \mathbf{10\,800} + \mathbf{10\,800} \times 1,015 + \mathbf{10\,800} \times 1,015^2 + \ldots + \mathbf{10\,800} \times 1,015^7$$

$$S = \mathbf{10\,800}\,(1 + 1,015 + 1,015^2 + \ldots + 1,015^7)$$

Comme 1,015 est différent de 1, on a

$$S = \mathbf{10\,800} \times \frac{1 - 1,015^8}{1 - 1,015} = \mathbf{10\,800} \times \frac{1 - 1,015^8}{-0,015}$$

$$\mathbf{S} = -720\,000\,(1 - 1,015^8) = 720\,000\,(1,015^8 - 1) \approx \mathbf{91\,074,66}$$

La somme totale remboursée par Alain à la fin de son prêt est donc d'environ 91 075€.

EXERCICE 4 (9 *points*) SUITE ET ALGORITHME.

À l'instant t = 0, on injecte à un patient une dose de 2 mg d'un médicament. On suppose que ce médicament se répartit uniformément dans le sang et que, chaque heure, le corps en élimine 25 %. Pour tout entier n, on note R_n la masse en mg de médicament présente dans le sang au bout de n heures.

1. Montrer que (R_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

La masse en mg de médicament présente dans le sang diminue de 25% par heure, donc pour tout n on a :

$$R_{n+1} = \left(1 - \frac{25}{100}\right) R_n \qquad\qquad R_{n+1} = 0,75\, R_n$$

On en déduit que **la suite (R_n) est une suite géométrique de raison 0,75 (b = 0,75).**

De plus, à l'instant t = 0, la dose injectée au patient est de 2 mg,

donc **son premier terme est $R_0 = 2$.**

2. Exprimer R_n en fonction de n.

Comme (R_n) est une suite géométrique de raison 0,75 (b = 0,75) et de premier terme R_0,

on a, pour tout n, $\quad \mathbf{R_n} = R_0 \times b^n = \mathbf{2 \times 0{,}75^n}$

3. Quel est le sens de variation de cette suite. Interpréter ce résultat.

$0 < 0,75 < 1$ donc la suite $(0,75^n)$ est strictement décroissante.

En multipliant par 2 qui est strictement positif, les variations sont conservées on en déduit que :

la suite (R_n) est strictement décroissante.

4. A l'aide de l'algorithme ci-dessous, on veut déterminer à partir de combien de temps la quantité de médicament présent dans le sang sera inférieure à 10^{-2} mg.

a) Compléter cet algorithme.

Initialisation: *N prend la valeur* **0**
R prend la valeur **2**
Traitement : *Tant que R* $\geq$ 10^{-2}
R prend la valeur **0,75 × R**
N prend la valeur N + 1
Fin de Tant que
Sortie : *Afficher* **N**

b) Répondre alors à la question posée.

La question posée revient à chercher la plus petite valeur de n telle que

$\mathbf{R}_n < \mathbf{10^{-2}}$

Avec l'algorithme, on obtient n = 9

La quantité de médicament présent dans le sang sera inférieure à $\mathbf{10^{-2}}$ mg au bout de 9 heures.

5. Quelle est la limite de la suite (R_n) ? Interpréter ce résultat.

$0 < 0{,}75 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}75^n = 0$

En multiplier par 2 qui est strictement positif, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{R}_n = \mathbf{0}$

Cela signifie qu'à long terme, le médicament aura été totalement éliminé par l'organisme.