TL spé math/TES	**Eléments de correction du D.S. n°4 du 16 janvier 2015**	**1h15min**
Le barème est donné à titre indicatif sur 30		

Exercice 1 (*11,5 points*) **PROBABILITÉS.**

Une enquête a été réalisée auprès des élèves inscrits à la demi-pension d'un lycée.

Les résultats révèlent que :

- 95% des élèves déclarent manger régulièrement à la cantine et parmi ceux-ci 70% sont satisfaits de la qualité des repas ;
- 20% des élèves qui ne mangent pas régulièrement sont satisfaits de la qualité des repas.

On choisit un élève au hasard parmi les élèves inscrits à la demi-pension.

On note les évènements suivants :

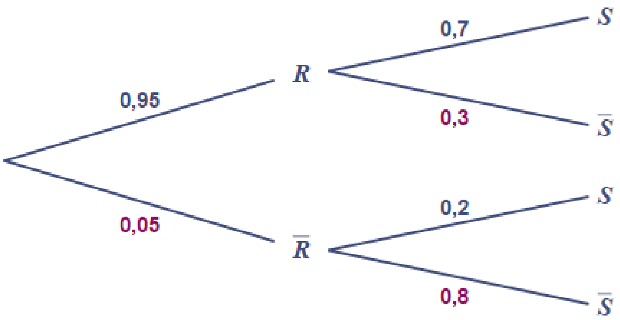
R : « l'élève mange régulièrement à la cantine » ;
S : « l'élève est satisfait ».

On notera $\overline{R}$ et $\overline{S}$ les évènements contraires de R et S.

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.

- 95% des élèves déclarent manger régulièrement à la cantine et parmi ceux-ci 70% sont satisfaits de la qualité des repas d'où **$p(R) = 0,95$, $p(\overline{R}) = 1 - 0,95 = 0,05$** et **$p_R(S) = 0,7$.**
- 20% des élèves qui ne mangent pas régulièrement sont satisfaits de la qualité des repas d'où **$p_{\overline{R}}(S) = 0,2$.**

D'où l'arbre pondéré traduisant cette situation :



2. Calculer la probabilité que l'élève mange régulièrement à la cantine et soit satisfait de la qualité des repas.

$p(R \cap S) = p_R(S) \times p(R)$ Soit **$p(R \cap S) = 0,7 \times 0,95 = 0,665$**

3. Montrer que la probabilité de l'évènement S est égale à 0,675.

Les évènements R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$p(S) = p(R \cap S) + p(\overline{R} \cap S)$

Or $p(\overline{R} \cap S) = p_{\overline{R}}(S) \times p(\overline{R})$ Soit $p(\overline{R} \cap S) = 0,2 \times 0,05 = 0,01$

On obtient alors **$p(S) = 0,665 + 0,01 = 0,675$**

4. Sachant que l'élève n'est pas satisfait de la qualité des repas, calculer la probabilité qu'il mange régulièrement à la cantine. Donner le résultat arrondi à 10^{-3}.

$$p_{\overline{S}}(R) = \frac{p(R \cap \overline{S})}{p(\overline{S})}$$

Or $p(R \cap \overline{S}) = p_R(\overline{S}) \times p(R)$ Soit $p(R \cap \overline{S}) = 0,3 \times 0,95 = 0,285$

et $p(\overline{S}) = 1 - 0,675 = 0,325$

d'où **$p_{\overline{S}}(R) = \frac{0,285}{0,325} \approx 0,877$**

5. On interroge successivement et de façon indépendante quatre élèves pris au hasard parmi les élèves inscrits à la demi-pension.
On note X la variable aléatoire égale au nombre d'élèves déclarant être satisfaits de la qualité des repas. Le nombre d'élèves étant suffisamment grand, on considère que X suit une loi binomiale.

Les résultats seront arrondis au millième.

a. Préciser les paramètres de cette loi binomiale.

X suit une loi binomiale de paramètres 4 et 0,675.

b. Calculer la probabilité de l'évènement A : « les quatre élèves sont satisfaits de la qualité des repas ».

On mathématisera l'énoncé, on indiquera la formule utilisée, puis on donnera l'arrondi demandé.

$$\mathbf{p\,(A) = p\,(X = 4)} = \binom{4}{4} \times 0{,}675^4 \times (1 - 0{,}675)^{4-4} = 0{,}675^4 \approx \mathbf{0{,}208}$$

c. Décrire à l'aide d'une phrase l'évènement $\overline{A}$ et calculer sa probabilité.

$\overline{A}$ est l'évènement : « les quatre élèves ne sont pas satisfaits de la qualité des repas ».

$\overline{A}$: « un élève au moins n'est pas satisfait de la qualité des repas ».

$\mathbf{p\,(\overline{A})} = 1 - p\,(X = 4) \approx 1 - 0{,}208 = \mathbf{0{,}792.}$

Exercice 2 (5,5 *points*) ESTIMATION

L'étude de 125 squelettes d'adultes de la population de Wharram Percy, un village isolé d'Angleterre au Moyen Âge, a permis de constater que 20 des personnes étaient gauchères. On considère que cette population permet d'obtenir une image représentative du pourcentage réel de vrais gauchers dans une population de cette époque.

1. Donnez un intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 du pourcentage de gauchers dans la population de Wharram Percy.

$n = 125$

$f = \dfrac{20}{125} = 0{,}16$

Conditions :

$n = 125$ **donc $n \geq 30$**

$nf = 125 \times 0{,}16 = 20$ donc **$nf \geq 5$**

$n(1 - f) = 125 \times (1 - 0{,}16) = 125 \times 0{,}84 = 105$ donc **$n(1 - f) \geq 5$**

On peut donc utiliser l'intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 : $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}} ; f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$

$$f - \frac{1}{\sqrt{n}} = 0{,}16 - \frac{1}{\sqrt{125}} \approx \mathbf{0{,}07}$$

$$f + \frac{1}{\sqrt{n}} = 0{,}16 + \frac{1}{\sqrt{125}} \approx \mathbf{0{,}25}$$

IC = [0,07 ; 0,25].

2. En Angleterre, de nos jours, la proportion de gauchers se situe entre 10 et 13%.

Peut-on, au niveau de confiance 0,95, dire que de nos jours la population de gauchers est moins élevée qu'au Moyen Âge ?

L'intervalle IC contient l'intervalle [0,10 ; 0,13]. On ne peut donc rien conclure.

Exercice 3 (*points*) **FONCTIONS EXPONENTIELLES**

On injecte à un patient un médicament et on mesure régulièrement, pendant 15 heures, la concentration, en grammes par litre, de ce médicament dans le sang.

On obtient la courbe ci-dessous.

A. Étude graphique

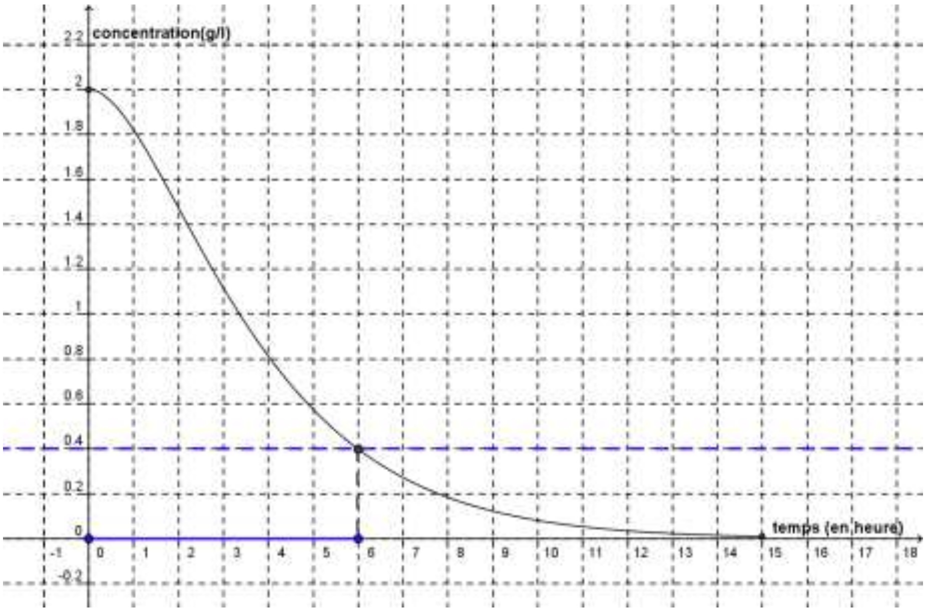
Avec la précision permise par le graphique, indiquer :

1. la concentration à l'instant initial ;

la concentration à l'instant initial est de 2g/l car f (0) = 2

2. l'intervalle de temps pendant lequel la concentration est supérieure ou égale à 0,4 gramme par litre. [0 ; 6]

on cherche les abscisses des points de la courbe qui se trouvent au-dessus ou sur la droite d'équation y = 0,4



On fera apparaitre sur le graphique les traits de construction nécessaires.

B. Étude théorique

On admet que la concentration peut être modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 15] par

$$f(x) = (x + 2)\,e^{-0,5x}$$

où x représente le nombre d'heures écoulées depuis l'instant initial et $f(x)$ la concentration, en grammes par litre, du médicament dans le sang.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Justifier que $f'(x) = -0,5x\,e^{-0,5x}$ et en déduire le tableau de variation de la fonction f sur [0 ; 15].

$f(x) = (x + 2)\,e^{-0,5x}$

La fonction f est dérivable et $f = uv$

d'après la formule de dérivation d'un produit : $f' = u'v + uv'$

$u(x) = x + 2$ $\quad u'(x) = 1$

$v(x) = e^{-0,5x}$ $\quad v'(x) = (-0,5)\,e^{-0,5x}$

$f'(x) = 1\times e^{-0,5x} + (x+2)(-0,5)\,e^{-0,5x} = e^{-0,5x} - 0,5x\,e^{-0,5x} - e^{-0,5x} = -0,5x\,e^{-0,5x}$

x	0		15
Signe de $-0,5x$	0	–	
Signe de $e^{-0,5x}$		+	
Signe de $f'(x)$	0	–	
Variations de f	2	↘	$f(15)$

donc la fonction f est strictement décroissante sur [0 ; 15].

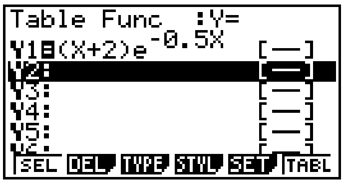
2. Justifier que l'équation $f(x) = 0{,}1$ admet une unique solution α sur l'intervalle [0 ; 15].

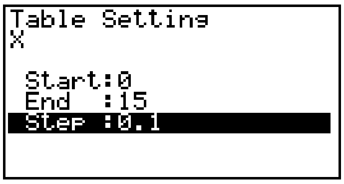
La fonction f est continue est strictement décroissante sur [0 ; 15].
De plus $f(0) = 2$ et $f(15) \approx 0{,}009$, donc 0,1 est compris entre $f(0)$ et $f(15)$.

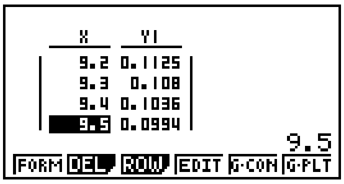
Donc, d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on peut dire que l'équation $f(x) = 0{,}1$ admet une solution unique dans l'intervalle [0 ; 15] ; on appelle α cette solution.

3. Déterminer un encadrement de α d'amplitude un dixième.

Première méthode : menu table

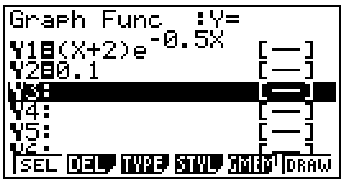


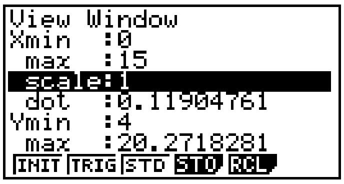




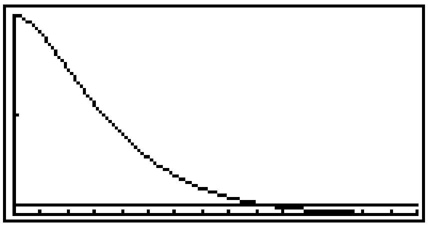
$f(9{,}4) \approx 0{,}104$ et $f(9{,}5) \approx 0{,}099$ **donc $9{,}4 < \alpha < 9{,}5$**

Seconde méthode : menu graph

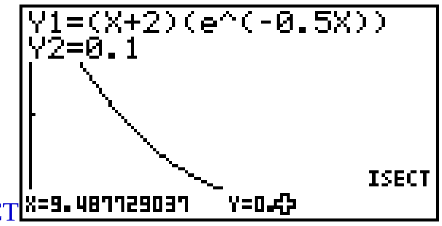




DRAW ZOOM AUTO



GSOLV ISCT



donc $9{,}4 < \alpha < 9{,}5$

C. Interprétation des résultats

En vous aidant des résultats obtenus dans la partie B, répondre à la question ci-dessous.

On estime que le médicament n'est plus actif lorsque la concentration est strictement inférieure à 0,1 gramme par litre. Pendant combien de temps le médicament est-il actif ?

Vous rédigerez entièrement votre recherche.

On cherche à résoudre $f(x) \geq 0{,}1$

x	0	α	15
Variations de f	2	0,1	$f(15)$

$f(x) \geq 0{,}1$ sur [0 ; α]

Or $9{,}4 < \alpha < 9{,}5$

On en déduit que le médicament est actif pendant environ 9,4h soit 9h24min.