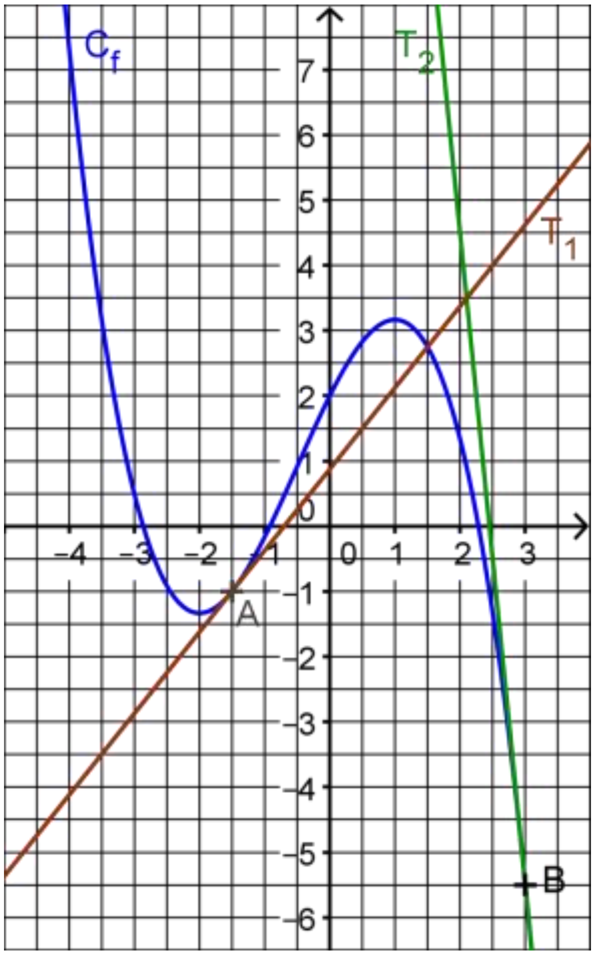
1L spé math - 1ES Durée : 1h45	**Corrigé du D.S. de Mathématiques n°3**	Vendredi 30 janvier 2015 **Calculatrice autorisée**

Le barème est donné sur 40 points à titre indicatif.



EXERCICE 1. (16 *points*)

La courbe $\mathcal{C}_f$, ci-contre, représente une fonction f, définie et dérivable sur ℝ.
Les droites T_1 et T_2 sont les tangentes à la courbe $\mathcal{C}_f$, respectivement aux points A et B.
La courbe $\mathcal{C}_f$ admet deux tangentes parallèles à l'axe des abscisses, aux points d'abscisses respectives −2 et 1.

PARTIE A : LECTURES GRAPHIQUES

Par lecture graphique, déterminer :

1. L'image de 0 par la fonction f.
L'image de 0 par la fonction est f (0) = 2.

2. Le nombre dérivé de la fonction f en −1,5.
$\mathbf{f'(-1{,}5) = \frac{5}{4}}$ f ′(−1,5) est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse −1,5 : T_1

3. f (3). **f (3) = − 5,5**

4. f ′(3). **f ′(3) = −10** f ′(3) est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 3 : T_2

PARTIE B : ÉTUDE DE LA DÉRIVÉE ET SECOND DEGRÉ

La fonction f est définie pour tout réel x par :

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$$

On note f ′ la fonction dérivée de la fonction f.

1. Pour tout réel x, déterminer l'expression de f ′(x), en fonction de x.

$$\mathbf{f'(x)} = -\frac{1}{3} \times 3x^2 - \frac{1}{2} \times 2x + 2 \times 1 + 0 = \mathbf{-x^2 - x + 2}$$

2. a. Résoudre sur ℝ, l'équation f ′(x) = 0. En donner une interprétation graphique pour la courbe représentative de f.

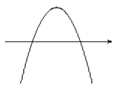
$\mathbf{f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - x + 2 = 0}$

$\Delta = 1 + 8 = \mathbf{9}$ $\quad x_1 = \frac{1-3}{-2} = \mathbf{1}$ **et** $\quad x_2 = \frac{1+3}{-2} = \mathbf{-2}$ $\quad$ **S = {1 ; −2}**

Ceci signifie que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet deux tangentes horizontales aux points d'abscisses respectives −2 et 1.

b. Dresser le tableau de signe de f ′(x).

Δ > 0 et *a* < 0 (a = −1), donc on en déduit le signe de f ′(x) :



x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
Signe de f ′(x)		−	0	+	0	−	

3. a. Déterminer par le calcul une équation de la tangente T_2 à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 3.

(T_2) : $y = f'(3)(x-3) + f(3)$ $\quad$ où $\quad f'(3) = -10$ et $f(3) = -5{,}5$
(T_2) : $y = -10(x-3) + (-5{,}5)$
(T_2) : $y = -10x + 30 - 5{,}5$
$\mathbf{(T_2) : y = -10x + 24{,}5}$

b. Démontrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ possède une autre tangente T_3, parallèle à la droite T_2, et calculer les coordonnées du point de contact.

(T_3) //(T_2) donc elles ont le même coefficient directeur.
On cherche donc x, tel que : f ′(x) = −10 $\quad$ soit $-x^2 - x + 2 = -10 \Leftrightarrow \mathbf{-x^2 - x + 12 = 0}$

$\Delta = 1 + 48 = \mathbf{49}$ $\quad x_1 = \frac{1-7}{-2} = \mathbf{3}$ **et** $\quad x_2 = \frac{1+7}{-2} = \mathbf{-4}$

Donc (T_3) est la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point C d'abscisse − 4.

$y_C = \mathbf{f(-4)} = -\frac{1}{3}(-4)^3 - \frac{1}{2}(-4)^2 + 2(-4) + 2 = \frac{64}{3} - 8 - 8 + 2 = \mathbf{\frac{22}{3}}$ $\quad$ **Le point de contact est : C $(-4 ; \frac{22}{3})$**

EXERCICE 2. (2 *points*)

La droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -6x + 19$ est tangente à la courbe d'une fonction f au point A d'abscisse 2.
Déterminer f ' (2) et l'ordonnée du point A.

f ' (2) est le coefficient directeur de $\mathcal{D}$, donc **f ' (2) = − 6.**
Le point A, d'abscisse 2, appartient à $\mathcal{D}$, donc $y_A = -6 \times 2 + 19 = \mathbf{7}$

EXERCICE 3. (2 *points*)

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3n^2 - n + 5$
Calculer u_0, u_1 et u_2.

$\mathbf{u_0 = 5}$ $\qquad$ $\mathbf{u_1} = 3 - 1 + 5 = \mathbf{7}$ $\qquad$ $\mathbf{u_2} = 3 \times 4 - 2 + 5 = 12 - 2 + 5 = \mathbf{15}$

EXERCICE 4. (4 *points*)

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 5$

a) Calculer u_1, u_2 et u_3.

$\mathbf{u_1} = u_0^2 - u_0 + 5$ $\qquad$ $\mathbf{u_2} = u_1^2 - u_1 + 5$ $\qquad$ $\mathbf{u_3} = u_2^2 - u_2 + 5$
$\mathbf{u_1} = 1 - 1 + 5 = \mathbf{5}$ $\qquad$ $\mathbf{u_2} = 25 - 5 + 5 = \mathbf{25}$ $\qquad$ $\mathbf{u_3} = 625 - 25 + 5 = \mathbf{605}$

b) Donner une relation entre u_8 et u_9.

$\mathbf{u_9 = u_8^2 - u_8 + 5}$

EXERCICE 5. (5 *points*)

La suite (u_n) est définie par son premier terme $u_0 = 1$ et chaque autre terme est égal au carré du terme précédent auquel on ajoute 1.

a) Calculer u_1, u_2 et u_3.

$\mathbf{u_1} = u_0^2 + 1$ $\qquad$ $\mathbf{u_2} = u_1^2 + 1$ $\qquad$ $\mathbf{u_3} = u_2^2 + 1$
$\mathbf{u_1} = 1 + 1 = \mathbf{2}$ $\qquad$ $\mathbf{u_2} = 4 + 1 = \mathbf{5}$ $\qquad$ $\mathbf{u_3} = 25 + 1 = \mathbf{26}$

b) Donner une relation entre u_{n+1} et u_n.

$\mathbf{u_{n+1} = u_n^2 + 1}$

EXERCICE 6. (5 *points*)

On donne l'algorithme suivant :

```
Saisir N (entier naturel non nul)
U = 0
Pour I allant de 1 à N
    U prend la valeur 3U + 2
Fin du Pour
Afficher U
```

1 On entre la valeur N = 3.

a. Faire tourner l'algorithme et compléter, autant que nécessaire, le tableau ci-dessous.

Valeur prise par I		1	2	3
Valeur prise par U	**0**	**2**	**8**	**26**

b. Qu'affiche l'algorithme ?

Affichage : 26

2 L'algorithme ci-dessus définit une suite de premier terme $u_0 = 0$. Donner la relation liant u_{n+1} et u_n.

$\mathbf{u_{n+1} = 3\,u_n + 2}$

EXERCICE 7. (6 *points*)

On lance deux dés tétraédriques (à quatre faces) dont les faces sont numérotées de 1 à 4. On appelle X la variable aléatoire égale à la somme des deux dés.

1. Compléter le tableau ci-dessous donnant les valeurs de la somme X :

2nd dé \ 1er dé	1	2	3	4
1	**2**	**3**	**4**	**5**
2	**3**	**4**	**5**	**6**
3	**4**	**5**	**6**	**7**
4	**5**	**6**	**7**	**8**

2. Déterminer la loi de probabilité de X.

x_i	2	3	4	5	6	7	8
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

3. Calculer l'espérance de X. En donner une interprétation.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{i=7} x_i \times p(X = x_i) = \frac{2 + 3 \times 2 + 4 \times 3 + 5 \times 4 + 6 \times 3 + 7 \times 2 + 8}{16} = \frac{80}{16}$$

$E(X) = 5$

Sur un grand nombre de lancers, la somme moyenne obtenue sera 5.