TL spé math/TES **Éléments de correction du D.S. n°5 du Vendredi 13 Février 2015** **1h15min**

Le barème est donné à titre indicatif sur 20

Exercice 1 (8 *points*) ÉTUDE DE FONCTION

La capacité pulmonaire d'une personne est la quantité d'air (mesurée en litres) pouvant être inspirée. Dans le cas d'une inspiration forcée, à partir de 10 ans, la capacité pulmonaire (en litres) d'une personne peut être modélisée en fonction de son âge x (en années) par la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{110(\ln x - 2)}{x}$$

1. On donne ci-dessous, la courbe ($\mathscr{C}$) représentative de la fonction f sur l'intervalle [10 ; 100] dans un repère orthogonal.
En utilisant la courbe ($\mathscr{C}$) :

a. Estimer graphiquement à quel âge la capacité pulmonaire est maximale puis donner cette capacité ?

Le maximum de la fonction f est atteint pour $x = 20$,
donc **la capacité pulmonaire est maximale à 20 ans.**

b. Estimer graphiquement l'âge à partir duquel un adulte a une capacité pulmonaire inférieure à celle d'un enfant de 10 ans ?

D'après le graphique (voir tracés), **un adulte de 78 ans et plus, a une capacité pulmonaire inférieure à celle d'un enfant de 10 ans**

2. **a.** On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle [10 ; 100].

Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle [10 ; 100] : $f'(x) = 110\,\dfrac{3 - \ln x}{x^2}$

$f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 110(\ln x - 2)$ donc $u'(x) = \dfrac{110}{x}$

donc $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ $v(x) = x$ donc $v'(x) = 1$

$$f'(x) = \frac{\frac{110}{x} \times x - 110(\ln x - 2) \times 1}{x^2} = \frac{110 - 110\ln x + 220}{x^2} = \frac{330 - 110\ln x}{x^2} = 110\,\frac{3 - \ln x}{x^2}$$

b. Montrer que si $x \in [10 ; e^3]$ alors $3 - \ln x \geq 0$.

$x \in [10 ; e^3] \iff 10 \leq x \leq e^3$
$\iff \ln 10 \leq \ln x \leq \ln(e^3)$
$\iff \ln 10 \leq \ln x \leq 3$

donc $3 - \ln x \geq 0$

c. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle [10 ; 100].

$110 > 0$ et pour tout $x \in [10 ; 100]$, $x^2 > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $3 - \ln x$.

x	10		e^3		100
Signe de 110		+		+	
Signe de $3 - \ln x$		+	0	−	
Signe de x^2		+		+	
Signe de $f'(x)$		+	0	−	
Variations de f	$f(10)$	↗	$f(e^3)$	↘	$f(100)$

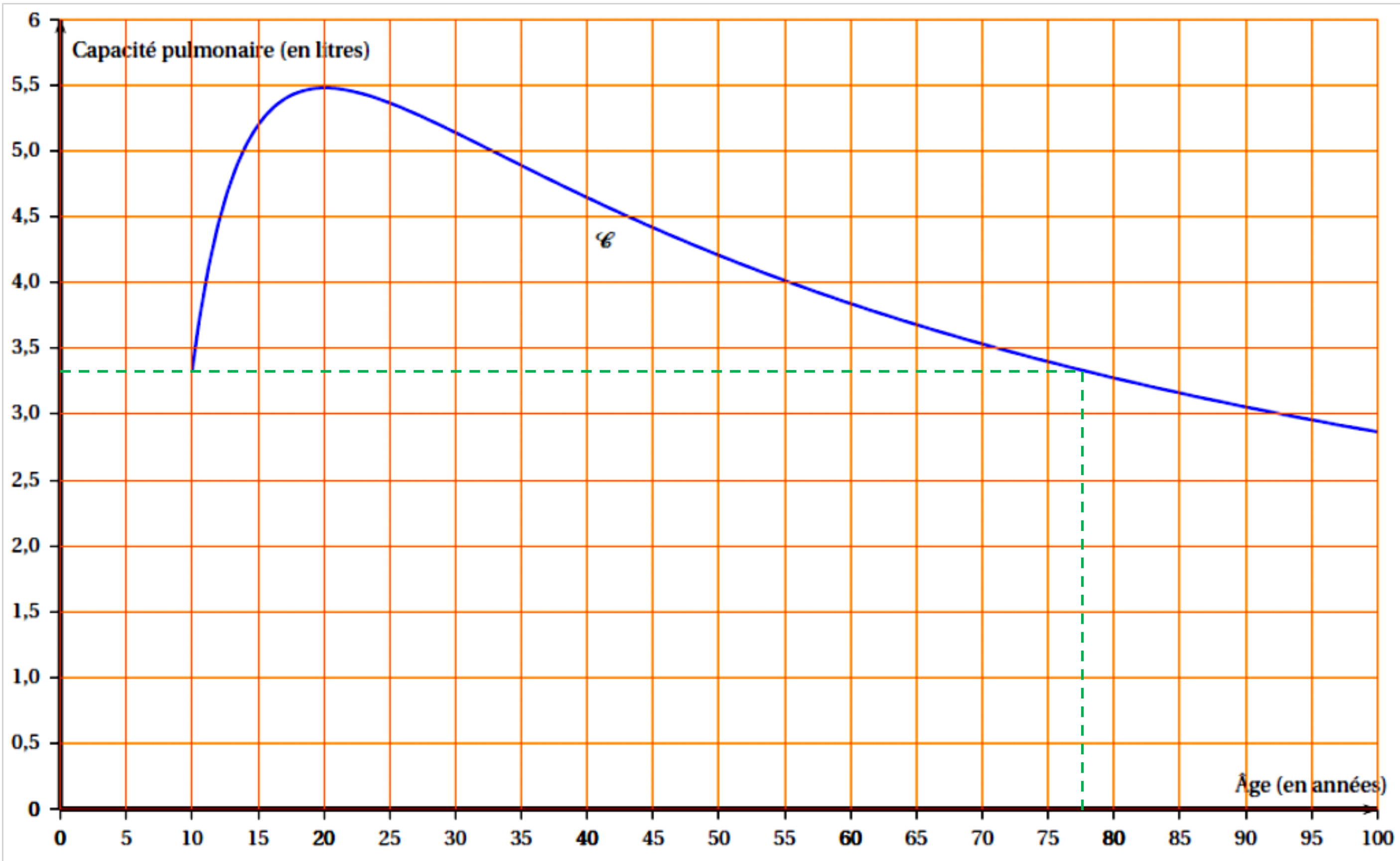
$f(10) = \dfrac{110(\ln 10 - 2)}{10} = 11(\ln 10 - 2)$

$f(100) = \dfrac{110(\ln 100 - 2)}{100} = 1{,}1(\ln 100 - 2)$

$\boldsymbol{f(e^3)} = \dfrac{110(\ln(e^3) - 2)}{e^3} = \dfrac{110(3 - 2)}{e^3} = \boldsymbol{\dfrac{110}{e^3}}$

d. Déterminer la valeur exacte du maximum de f puis la valeur arrondie à 10^{-2} près.

La valeur exacte du maximum de f est donc $\boldsymbol{\dfrac{110}{e^3}}$ **litres**. Soit environ **5,48 litres à $\boldsymbol{10^{-2}}$ près.**



Exercice 2 (12 *points*) **SUITES**

Le gestionnaire d'une salle de concert constate que, chaque année, le nombre d'abonnés est constitué de 70% des abonnés de l'année précédente, auxquels s'ajoutent 210 nouveaux abonnés.
Le nombre d'abonnés en 2010 était de 600.

1. Calculer le nombre d'abonnés en 2011 et 2012.

$600 \times \dfrac{70}{100} = 420$ et $420 + 210 = 630$

Le nombre d'abonnés en 2011 est de 630.

$630 \times \dfrac{70}{100} = 441$ et $441+210 = 651$

Le nombre d'abonnés en 2012 est de 651.

2. On définit la suite (u_n) par : $u_0 = 600$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,7\, u_n + 210$.

On utilise un tableur pour calculer les termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u(n)
2	0	600
3	1	
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	
8	6	
9	7	
10	8	
11	9	
12	10	

Proposer une formule à écrire en B3 pour calculer u_1 ; cette formule tirée vers le bas dans la colonne devra permettre de calculer les valeurs successives de la suite (u_n).

La formule à écrire dans la cellule B3 pour calculer u_1 est **= B2*0.7 + 210** ; on recopie cette formule dans les cases B4, B5, etc.

3. On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 700$

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,7.
Préciser son premier terme.

Pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - 700$; donc $u_n = v_n + 700$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 700 \\ &= 0,7u_n + 210 - 700 \\ &= 0,7(v_n + 700) - 490 \\ &= 0,7v_n + 490 - 490 \end{aligned}$$

$$\mathbf{v_{n+1} = 0,7v_n}$$

$v_0 = u_0 - 700 = 600 - 700 = -100$

Donc la suite (v_n) est géométrique de premier terme $\mathbf{v_0 = -100}$ et de raison $b = 0,7$.

b) Exprimer v_n en fonction de n, puis en déduire que $u_n = 700 - 100 \times 0{,}7^n$

On en déduit que, pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times b^n$ donc $v_n = -100 \times 0{,}7^n$.

On a vu que, pour tout n, $u_n = v_n + 700$

donc on peut dire que $u_n = -100 \times 0{,}7^n + 700$

ce qui équivaut à $u_n = 700 - 100 \times 0{,}7^n$.

4. a) Soit n un entier naturel. Démontrer que « $u_n \geq 697$ » équivaut à « $0{,}7^n \leq 0{,}03$ »

$u_n \geq 697 \Leftrightarrow 700 - 100 \times 0{,}7^n \geq 697$

$\Leftrightarrow 3 \geq 100 \times 0{,}7^n$

$\Leftrightarrow 0{,}03 \geq 0{,}7^n$

$\Leftrightarrow 0{,}7^n \leq 0{,}03$

b) Pour résoudre cette inéquation, on utilise l'algorithme ci-contre :

Quelle valeur obtient-on à la sortie ?

Variables : N est un entier naturel
Initialisation : Affecter à N la valeur 0
Affecter à U la valeur 1
Traitement :
Tant que U > 0,03
Affecter à N la valeur N+1
Affecter à U la valeur $0{,}7 \times U$
Fin de Tant que
Sortie : afficher N

Pour résoudre cette inéquation, on fait tourner l'algorithme proposé dans le texte (valeurs de U arrondies au millième dès que nécessaire) :

	N	U
Initialisation	0	1
	1	0,7
	2	0,49
	3	0,343
	4	0,240
Traitement	5	0,168
	6	0,118
	7	0,082
	8	0,058
	9	0,040
	10	0,028
Sortie	On affiche 10	

On obtient 10 pour valeur de N en sortie.

c) Retrouver ce résultat en résolvant l'inéquation $0{,}7^n \leq 0{,}03$
(on utilisera la fonction ln)

On résout l'inéquation $0{,}7^n \leq 0{,}03$:

$0{,}7^n \leq 0{,}03 \Leftrightarrow \ln(0{,}7^n) \leq \ln(0{,}03)$

$\Leftrightarrow n \times \ln(0{,}7) \leq \ln(0{,}03)$

$\Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln(0{,}03)}{\ln(0{,}7)}$ l'ordre est inversé car $\ln(0{,}7) < 0$

Or $\dfrac{\ln(0{,}03)}{\ln(0{,}7)} \approx 9{,}83$ donc $\mathbf{n \geq 10}$ car n est un nombre entier.

5. *<u>En utilisant l'étude précédente</u>*, déterminer à partir de quelle année le nombre d'abonnés atteindra au moins 697.

Le nombre d'abonnés atteindra au moins 697 pour l'entier naturel n tel que $u_n \geq 697$

c'est-à-dire pour $n \geq 10$ donc **à partir de l'année 2010 + 10 soit 2020.**