

Exercice 1.

Dans un gratte-ciel de 100 étages, l'escalier de secours compte 18 marches par étage.

Julien est au sommet et Denis au bas de l'escalier. Ils décident, par téléphone, de se rejoindre en partant au même instant. Denis monte deux marches par seconde et Julien en descend cinq.

On note respectivement $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$ et $v_0, v_1, v_2, \dots, v_n$ le nombre de marches qui séparent Julien et Denis du bas de l'immeuble, au départ puis 1 seconde, 2 secondes, ..., n secondes après leur départ.

Ainsi, $u_0 = 1800$ et $v_0 = 0$.

1. Calculez u_1, u_2, v_1 et v_2 .

$$u_1 = 1800 - 5 = 1795 \quad v_1 = 2$$

$$u_2 = 1795 - 5 = 1790 \quad v_2 = 4$$

2. Quelle est la nature des suites (u_n) et (v_n) ? Précisez la raison de chacune de ces suites.

Denis monte deux marches par seconde et Julien en descend cinq, donc

$$u_{n+1} = u_n - 5 \quad \text{et} \quad v_{n+1} = v_n + 2$$

Les suites (u_n) et (v_n) sont donc arithmétiques, de raisons respectives -5 et 2 .

3. a) Exprimez u_n et v_n en fonction de n .

$$u_n = u_0 + n \times (-5) = 1800 - 5n$$

$$v_n = v_0 + n \times 2 = 2n$$

b) Calculez u_{100} et v_{100} .

$$u_{100} = 1800 - 5 \times 100 = 1300$$

$$v_{100} = 2 \times 100 = 200$$

Exercice 2. Livre page 122 n°70

Dans un restaurant, le coût total en euros pour la fabrication de x repas est donné par la relation $C(x) = 2x^2 - 230x + 7200$ pour x compris entre 30 et 120.

Lorsque x repas sont fabriqués, on appelle coût moyen d'un repas le quotient $\frac{C(x)}{x}$. On note $C_M(x)$ ce coût moyen.

1. Donner l'expression de $C_M(x)$ en fonction de x .

$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{2x^2 - 230x + 7200}{x}$$

$$C_M(x) = 2x - 230 + \frac{7200}{x}$$

2. a. Calculer la dérivée de la fonction C_M .

$$C'_M(x) = 2 \times 1 + 7200 \times \frac{-1}{x^2}$$

$$C'_M(x) = 2 - \frac{7200}{x^2} = \frac{2x^2 - 7200}{x^2}$$

b. Montrer que cette dérivée a le même signe que $x - 60$ sur l'intervalle $[30 ; 120]$.

$$C'_M(x) = \frac{2x^2 - 7200}{x^2} = \frac{2(x^2 - 3600)}{x^2}$$

$$C'_M(x) = \frac{2(x - 60)(x + 60)}{x^2}$$

4. a) Quel est le sens de variation de (u_n) ?

La suite (u_n) est arithmétique de raison négative, donc elle est décroissante.

b) Quel est le sens de variation de (v_n) ?

La suite (v_n) est arithmétique de raison positive, donc elle est croissante.

5. À l'aide d'un tableur ou de votre calculatrice, éditez un tableau permettant d'observer les 400 premiers termes de chaque suite.

Déduisez-en le nombre de secondes nécessaires pour que Julien et Denis se rejoignent.

n	an	bn
255	525	510
256	520	512
257	515	514
258	510	516

On obtient : $u_{257} = 515$ et $v_{257} = 514$

$u_{258} = 510$ et $v_{258} = 516$

Donc Julien et Denis mettront 258 secondes pour se rejoindre.

6. Retrouvez le résultat précédent en résolvant une équation.

On résout l'équation : $u_n = v_n$

$$\Leftrightarrow 1800 - 5n = 2n$$

$$\Leftrightarrow 1800 = 7n$$

$$\Leftrightarrow \frac{1800}{7} = n$$

Comme $\frac{1800}{7} \approx 257,14$

ils se rejoignent à la 258^{ème} seconde.

2 est un nombre strictement positif, et sur $[30 ; 120]$, x^2 est strictement positif, de même que $(x + 60)$.

Par conséquent, $C'_M(x)$ a le même signe que $(x - 60)$ sur l'intervalle $[30 ; 120]$.

3. Étudier le sens de variation de la fonction C_M sur $[30 ; 120]$.

x	30	60	120
Signe de $x - 60$	-	0	+
Signe de $C'_M(x)$	-	0	+
Variations de C_M	70	10	70

3. Combien de repas faut-il fabriquer pour que le coût moyen d'un repas soit minimal ?

Pour que le coût moyen soit minimal, il faut fabriquer 60 repas.