1S T D : Études de fonctions **Corrigé**

Exercice n° 1 :

1. Soit la fonction g définie sur ℝ par : $g(x) = 4x^3 - 8x^2 - x + 2$

a. Démontrer que pour tout réel x : $g(x) = (x - 2)(4x^2 - 1)$.

$$(x-2)(4x^2-1) = 4x^3 - x - 8x^2 + 2$$
$$= g(x)$$

b. Résoudre dans ℝ, l'équation $g(x) = 0$.

$$g(x) = 0 \iff (x-2)(4x^2-1) = 0$$
$$\iff x - 2 = 0 \text{ ou } 4x^2 - 1 = 0$$
$$\iff x = 2 \text{ ou } (2x-1)(2x+1) = 0$$
$$\iff x = 2 \text{ ou } 2x - 1 = 0 \text{ ou } 2x + 1 = 0$$
$$\iff x = 2 \text{ ou } x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = -\frac{1}{2}$$

$$S = \left\{-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; 2\right\}$$

c. Déterminer, selon les valeurs de x, le signe de $g(x)$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
Signe de $x - 2$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
Signe de $4x^2 - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
Signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

2. Soit f la fonction définie sur ℝ par : $f(x) = 6x^4 - 16x^3 - 3x^2 + 12x + 10$

a. Démontrer que pour tout réel x : $f'(x) = 6\,g(x)$.

$$f'(x) = 6 \times 4x^3 - 16 \times 3x^2 - 3 \times 2x + 12$$
$$= 24x^3 - 48x^2 - 6x + 12$$
$$= 6(4x^3 - 8x^2 - x + 2)$$
$$= 6\,g(x).$$

b. Etudier les variations de la fonction f.

Le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $g(x)$ car 6 est positif.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f		↘	$\frac{45}{8}$	↗	$\frac{109}{8}$	↘	-10	↗	

c. Déterminer une équation de la tangente à la courbe C représentative de la fonction f au point d'abscisse 1.

Une équation de la tangente est de la forme :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$f'(1) = -18$
et $f(1) = 9$

$$y = -18(x-1) + 9$$
$$y = -18x + 18 + 9$$
$$y = -18x + 27$$

Exercice n° 2 :

Soit f une fonction numérique définie sur [1 ; 8] par $f(x) = ax + b + \frac{c}{x}$ où a, b et c sont trois réels.

On donne le tableau de variations suivant :

x	1		2		8
Signe de $f'(x)$		+	0	−	
Variation de f	−4	↗	−3	↘	

1. Déterminer les réels a, b et c.

$f(1) = -4 \iff a + b + c = -4$

$f(2) = -3 \iff 2a + b + \frac{c}{2} = -3$

$f'(x) = a - \frac{c}{x^2}$

$f'(2) = 0 \iff a - \frac{c}{4} = 0$

D'où le système :

$$\begin{cases} a + b + c = -4 \\ 2a + b + \frac{c}{2} = -3 \\ a - \frac{c}{4} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b + 4a = -4 \\ 2a + b + 2a = -3 \\ 4a = c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 5a + b = -4 & (L_1) \\ 4a + b = -3 & (L_2) \\ 4a = c \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1 & (L_1 - L_2) \\ b = -3 - 4a \\ c = 4a \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = -4 \end{cases} \quad \text{d'où } f(x) = -x + 1 - \frac{4}{x}$$

2. Calculer f (8).

$f(8) = -8 + 1 - \frac{4}{8} = -\frac{15}{2}$

Exercice n° 3 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$ et C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

f est définie $\iff x + 2 \neq 0$

$\iff x \neq -2$

donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{-2\}$.

2. Montrer que $f'(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{(x + 2)^2}$

$f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = x^2 - 1$ $\quad u'(x) = 2x$ $\quad f' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

$v(x) = x + 2$ $\quad v'(x) = 1$

$f'(x) = \frac{2x(x+2) - 1(x^2 - 1)}{(x+2)^2} = \frac{2x^2 + 4x - x^2 + 1}{(x+2)^2}$

$f'(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{(x+2)^2}$

3. Montrer que la tangente T à C_f au point d'abscisse -1 a pour équation : $y = -2x - 2$

T a pour équation $y = f'(-1)(x-(-1)) + f(-1)$

$f'(-1) = -2$ et $f(-1) = 0$

d'où $(T) : y = -2(x+1)$

$(T) : y = -2x - 2$

4. On veut savoir sur quel intervalle la courbe C_f est au-dessus de sa tangente T.

a) Montrer que cela revient à résoudre l'équation : $f(x) - (-2x-2) \geq 0$

On cherche les abscisses des points de la courbe C_f situés au-dessus de T, donc on cherche x tel que :

$$f(x) \geqslant -2x - 2$$

soit $f(x) - (-2x-2) \geqslant 0$.

b) Montrer que $f(x) - (-2x-2) = \dfrac{3x^2 + 6x + 3}{x+2}$

$$f(x) - (-2x-2) = \frac{x^2-1}{x+2} - (-2x-2)$$

$$= \frac{x^2-1}{x+2} + \frac{(2x+2)(x+2)}{x+2}$$

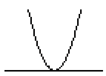
$$= \frac{x^2 - 1 + 2x^2 + 4x + 2x + 4}{x+2}$$

$$= \frac{3x^2 + 6x + 3}{x+2}$$

c) Résoudre $\dfrac{3x^2 + 6x + 3}{x+2} \geq 0$

On étudie le signe du polynôme du second degré : $3x^2 + 6x + 3$

$\Delta = 6^2 - 4 \times 3 \times 3 = 0$ $\Delta = 0$, donc le polynôme a une racine : $x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-6}{6} = -1$

De plus $a > 0$ donc 

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
Signe de $3x^2 + 6x + 3$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$+$	
Signe de $x + 2$		$-$	$\Vert$	$+$		$+$	
Signe du quotient $\dfrac{3x^2+6x+3}{x+2}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$+$	

d) Conclure.

• Sur l'intervalle $]-\infty ; -2[$, $f(x) - (-2x-2) < 0$ donc $f(x) < -2x-2$ et C_f est en dessous de sa tangente T.

• Sur l'intervalle $]-2 ; +\infty[$, $f(x) - (-2x-2) \geqslant 0$ donc $f(x) \geqslant -2x-2$ et C_f est au-dessus de T.

• $f(x) - (-2x-2) = 0 \Longleftrightarrow x = -1$, donc C_f et T se coupent au point d'abscisse -1

Exercice n° 4 :

On veut fabriquer une boîte de base carrée sans couvercle de volume 13 500 cm^3.
On veut déterminer les dimensions de cette boîte qui permettront d'utiliser le moins de matériau possible.

1. On note x le côté en cm de la base et h la hauteur de la boîte en cm. Exprimer h en fonction de x.

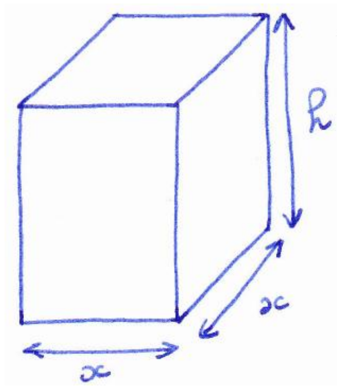
Le volume de la boite est égal à :

$x^2 \times h$ cm^3 $\quad x > 0$ et $h > 0$

Or ce volume est de 13500 cm^3

donc $x^2 \times h = 13500$

d'où $h = \dfrac{13500}{x^2}$



2. Soit A(x) la somme des aires de toutes les faces de cette boîte. Exprimer A(x) en fonction de x.

$A(x) = x^2 + 4 \times h \times x$

$A(x) = x^2 + 4 \times \dfrac{13500}{x^2} \times x$

$A(x) = x^2 + \dfrac{54000}{x}$

3. Démontrer que $A'(x) = \dfrac{2(x-30)(x^2+30x+900)}{x^2}$

$A'(x) = 2x + 54000 \times \dfrac{-1}{x^2} = \dfrac{2x^3 - 54000}{x^2}$

$$\frac{2(x-30)(x^2+30x+900)}{x^2} = \frac{(2x-60)(x^2+30x+900)}{x^2}$$

$$= \frac{2x^3 + 60x^2 + 1800x - 60x^2 - 1800x - 54000}{x^2}$$

$$= \frac{2x^3 - 54\,000}{x^2}$$

$$= A'(x).$$

4. Déterminer les dimensions de la boîte qui permettent que l'aire soit minimale et déterminer cette aire.

On étudie le signe de $x^2 + 30x + 900$

$\Delta = -2700$ $\quad \Delta < 0$ donc le polynôme n'a pas de racine

Comme $a = 1$ $\quad a > 0$ alors

$x^2 + 30x + 900 > 0$ sur $\mathbb{R}^{*+}$.

De plus $x - 30 = 0 \iff x = 30$

x	0		30		$+\infty$
Signe de $x - 30$	‖	$-$	0	$+$	
Signe de $x^2 + 30x + 900$	‖	$+$		$+$	
Signe de x^2	‖	$+$		$+$	
Signe de A'(x)	‖	$-$	0	$+$	
Variations de A	‖	↘	2700	↗	

D'après les variations de A, l'aire minimale est 2700 cm^2 atteinte lorsque $x = 30$ cm.

Donc $h = \dfrac{13500}{900} = 15$ cm.