TES/Spé TL	Interrogation n°5 Eléments de correction	02/04/2015 30 min

Exercice 1 : *(5,5 points)*

Rafael habite à 1 km de son lycée. On note X la variable aléatoire égale à la durée, exprimée en minutes, du trajet que Rafael emprunte pour se rendre au lycée.
On suppose que X est distribuée suivant la loi uniforme sur l'intervalle [15 ; 20].

1. a. Donner la fonction de densité de la loi suivie par X.

La loi suivie par X est la loi uniforme sur l'intervalle [15 ; 20] donc celle-ci admet pour fonction de densité la fonction f définie sur [15 ; 20] par $f(x) = \frac{1}{20-15} = \frac{1}{5} = 0{,}2$

b. Quel est le temps moyen du trajet de Rafael ?

Le temps moyen du trajet de Rafaël est l'espérance de X.

Comme X suit la loi uniforme sur [15 ; 20], son espérance E(X) est telle que :

$$E(X) = \frac{15+20}{2} = \frac{35}{2} = 17{,}5$$

Le temps moyen du trajet de Rafael est de 17 minutes 30.

c. Quelle est la probabilité que Rafael mette 15 minutes pour arriver au lycée ?

$p(X = 15) = 0$

d. Quelle est la probabilité qu'il mette moins de 17 minutes pour se rendre à l'école ?

Il s'agit de calculer $p(X < 17)$

Or comme X suit la loi uniforme sur [15 ; 20], $p(X < 17) = p(15 \leq X \leq 17) = \frac{17-15}{20-15} = \frac{2}{5} = 0{,}4$

e. A cause du trafic, il a mis plus de 17 minutes, quelle est la probabilité qu'il soit arrivé au lycée avec au moins une minute d'avance ?

Il s'agit de calculer $p_{(X > 17)}(X \leq 19)$

Or : $$p_{(X>17)}(X \leq 19) = \frac{p((X > 17) \cap (X \leq 19))}{p(X > 17)} = \frac{p(17 < X \leq 19)}{p(X > 17)} = \frac{\frac{19-17}{20-15}}{1 - p(X < 17)}$$

$$p_{(X>17)}(X \leq 19) = \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{2}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{2}{3}$$

2. Bonus : On suppose que la durée d'un trajet est indépendante de celle des autres trajets. Sur une semaine, Rafael se rend à son lycée tous les jours du lundi au vendredi.
Quelle est la probabilité qu'au moins un trajet ait duré plus de 17 minutes?

a) Chaque jour, la durée de son trajet peut être :

- plus de 17 minutes (succès) de probabilité $p(X > 17)$ soit $\frac{3}{5}$ (cf question 1d))

ou

- inférieure ou égale à 17 minutes (échec).

Ceci constitue **une épreuve de Bernoulli**.

b) Sur une semaine ici de 5 jours, la durée d'un trajet est indépendante de celle des autres trajets donc **on répète l'épreuve de Bernoulli 5 fois de façon identique et indépendante**. On est donc en présence d'un **schéma de Bernoulli**.

c) Soit **Y le nombre de trajets qui ont duré plus de 17 minutes, Y suit alors la loi binomiale de paramètres 5 et $\frac{3}{5}$.**

d) On cherche ici $p(Y \geq 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^5 = 1 - 0{,}4^5 = 0{,}98976$

<u>Conclusion</u> : la probabilité qu'au moins un trajet ait duré plus de 17 minutes est donc de 0,98976

<u>Exercice 2</u> (*5 points*)

Soient deux fonctions f et F définies respectivement sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2 e^{-x+1}$ et $F(x) = (x^2 + 2x + 2)\, e^{-x+1}$

1. Montrer que la fonction F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

$F = uv$ avec $u(x) = x^2 + 2x + 2$ $\quad u'(x) = 2x + 2$

$v(x) = e^{-x+1}$ $\quad v = e^{w}$ avec $w(x) = -x + 1$

$w'(x) = -1$

$v' = w' e^{w}$ $\quad v'(x) = -e^{-x+1}$

$F' = u'v + uv'$

$F'(x) = (2x + 2)\, e^{-x+1} + (x^2 + 2x + 2)(-e^{-x+1})$

$F'(x) = (2x + 2 - (x^2 + 2x + 2))\, e^{-x+1}$

$F'(x) = (2x + 2 - x^2 - 2x - 2)\, e^{-x+1}$

$F'(x) = (2x + 2 - x^2 - 2x - 2)\, e^{-x+1}$

$\mathbf{F'(x) = -x^2\, e^{-x+1}}$

Donc pour tout réel x, $F'(x) = f(x)$

Par conséquent, F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$

2. Déterminer alors la primitive G de f vérifiant $G(1) = 0$.

F et G sont deux primitives de f sur $\mathbb{R}$, donc pour tout réel x,

$G(x) = F(x) + C$ où C est une constante

On a donc $G(x) = (x^2 + 2x + 2)\, e^{-x+1} + C$

On cherche C tel que $G(1) = 0$

$(1^2 + 2\times 1 + 2)\, e^{-1+1} + C = 0$

$5 \times e^0 + C = 0$

$5 \times 1 + C = 0$

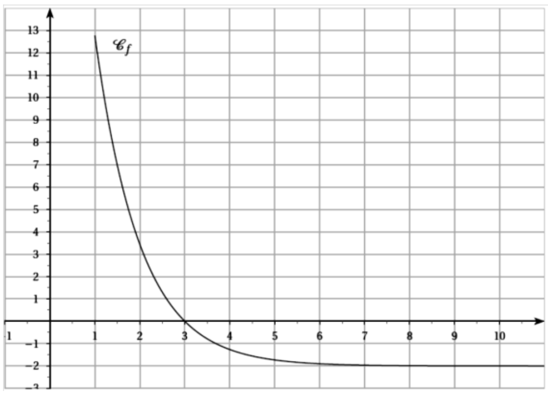
$\mathbf{C = -5}$

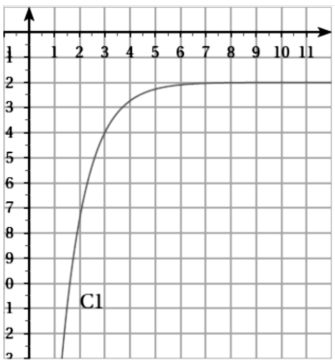
G est donc définie pour tout réel x par : $\mathbf{G(x) = (x^2 + 2x + 2)\, e^{-x+1} - 5}$

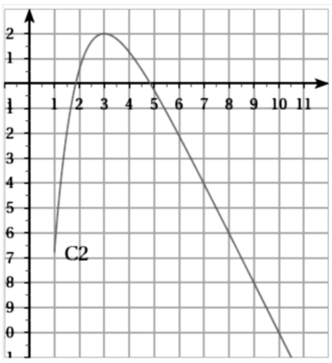
<u>Exercice 3</u> (*2 points*)

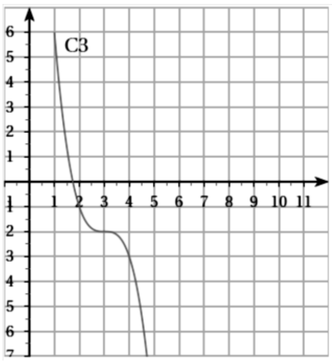
Soit la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[1 ; +\infty[$.
On a représentée ci-dessous 3 courbes. Parmi celles-ci, une seule est celle d'une primitive de f sur $[1 ; +\infty[$.

Préciser laquelle, **en justifiant votre réponse.**



courbe 1


courbe 2


courbe 3


F est une primitive de f sur $[1 ; +\infty[$ signifie que sur $[1 ; +\infty[$ $F' = f$

Or le signe de F′ donne les variations de F. On cherche donc le signe de f (x) qui permettra de déduire les variations de F et donc de choisir parmi les 3 courbes données celle qui convient :

x	1		3		$+\infty$
Signe de f (x)		+	0	–	
Variations de F		↗		↘	