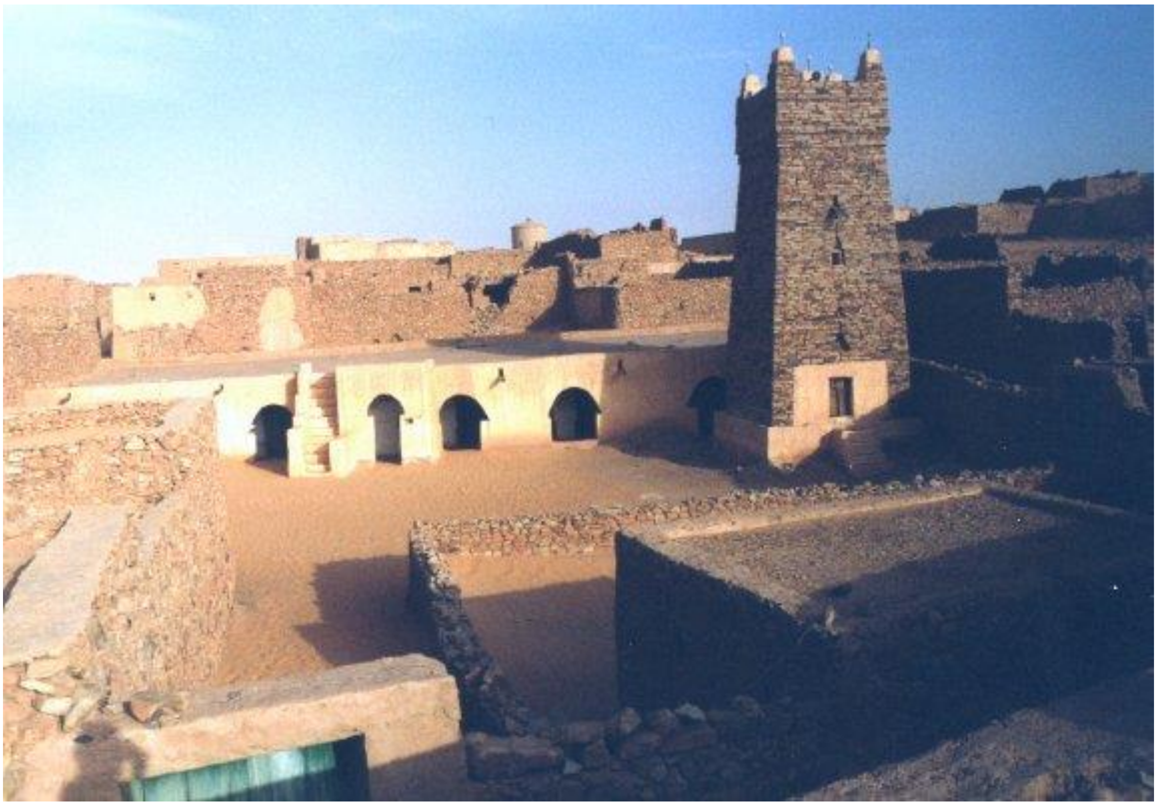
Nom :
Prénom :
Classe : 4ème 6
Collège Maurice Utrillo
100 Bd Ney
75018 Paris

Projet Mauritanie 2003-2004

Mathématiques



M. Bucard – Professeur de Mathématiques

Projet Mauritanie 2003-2004

Mathématiques

PRESENTATION

Travailler sur la Mauritanie, pays où se côtoient les cultures sub-saharienne, arabe et occidentale, est un excellent prétexte pour aborder plusieurs aspects des Mathématiques :

- d'abord pour s'interroger sur ce qu'est un problème *mathématique*, même s'il est en réalité très complexe de le définir,

- ensuite, entrevoir comment les mathématiques se sont progressivement « cristallisées » en se dépouillant de nombreux éléments qui les alourdissaient,

- Et finalement, connaître l'origine, et par là, comprendre peut-être mieux le sens de ce fameux x qui a traumatisé des générations d'écoliers et qui a fait dire à Victor Hugo :
  « On me tordait, depuis les ailes jusqu'au bec,
  Sur l'affreux chevalet des X et des Y ; »

Ces trois points sont abordés à travers une série de problèmes qui suivent une progression résumant l'évolution des mathématiques :

- des énigmes africaines de traversées de fleuve, qui sont intégrées dans de longs récits et chargées de nombreux éléments non mathématiques,

- des énigmes arabes de nature mathématique mais sans grande portée théorique,

- des problèmes qui se résolvent par l'al-gabr d'Al Khawarismi (IX ème siècle) proche de notre algèbre moderne mais encore « alourdie » par des méthodes de résolution longues et entièrement rhétoriques, et destinée à résoudre un large éventail de problèmes de nature concrète,

- et enfin, des problèmes de mise en équation du premier degré à une inconnue, (qui fait partie du programme de $4^{\text{ème}}$) où l'on pénètre encore plus dans l'abstraction, ici les mathématiques se mettent à vivre par elles-mêmes, le travail devient mécanique et théorisé, effroyablement efficace et peut-être dépourvu de poésie et d'humanité.

L'organisation des séquences vise à ressembler aux modes de résolutions adaptés à chaque type de problèmes, elle suivra donc la progression précédente :

- Les énigmes de traversée sont résolues oralement et à l'aide d'objets ou de personnages, elles doivent donner lieu à des discussions, des palabres peut-être,

- Les énigmes arabes sont résolues à l'aide de dessins et de calculs que les élèves écriront sur le tableau, montrant l'intérêt de l'écrit par rapport à la parole dans le cas des mathématiques,

- Les solutions des problèmes d'al-gabr seront entièrement rédigées sur des affiches et donneront lieu à des discussions, à l'image de ce qui aurait pu se passer dans une université orientale médiévale,

- Les problèmes de mise en équation seront résolus individuellement et leurs solutions rédigées sur ce cahier, méthode de travail assez traditionnelle dans un collège français de l'an 2000.

Il s'agit bien sûr d'un raccourci à la fois un peu artificiel et surtout très contestable tant du point de vue mathématique qu'historique, il est en tout cas sans prétention, et s'adresse, ne l'oublions pas, à des élèves de 4ème . Revivre le passage de l'oral à l'écrit, puis à la symbolisation, étapes de l'évolution des mathématiques, même si cela est fait dans un temps excessivement court, ne produira évidemment aucun miracle. Mais je crois que ce travail sera profitable pour les élèves de 4ème 6, d'abord, car beaucoup sont plus à l'aise à l'oral, et aussi parce que rattacher les outils mathématiques enseignés au collège, aux cultures d'origine de la majorité d'entre eux ne me semble pas être totalement dénué d'intérêt. On se gardera, bien entendu, de toute tentative de comparaison entre cultures, le présent travail étant bien trop incomplet pour pouvoir se forger le moindre avis.

En attendant le voyage en Mauritanie qui devrait avoir lieu, explorons les Mathématiques sous un angle un peu inhabituel.

A. Bucard.

Séquence 1 : Enigmes traditionnelles de traversées de fleuve

Les énigmes liées au passage d'un fleuve se retrouvent dans les cultures africaines aussi bien que dans la culture occidentale. La nature même de ces énigmes est d'être véhiculées par des récits, ce qui les enracine dans la culture où nous les rencontrons.

On trouve, par exemple, chez les Ila en Zambie le problème suivant : un homme doit faire traverser un fleuve par un léopard, une chèvre, un rat et un panier de grain de sorgho. Le bateau ne peut porter que l'homme et l'une des charges. L'homme ne peut laisser, sur aucune rive, le léopard avec la chèvre ou la chèvre avec le panier ou le rat avec le panier.

On ne peut résoudre ce problème par la simple logique ; il s'agit d'un dilemme éthique. Les Ila ont des relations spécifiques aux plantes et aux animaux, ils croient à la métempsycose et aux métamorphoses temporaires, c'est-à-dire qu'après la mort, ou pour un temps durant la vie, une personne peut « passer » dans un autre être vivant ou dans une plante.

Un autre problème provient de ce que les clans sont totémiques, avec pour totem des plantes, des animaux ou des objets naturels (chaque clan tient son nom du totem, et pense avoir avec lui une relation particulière). Enfin, les responsabilités sont particulièrement importantes pendant les voyages, et c'est une faute majeure que de laisser advenir quelque chose de dommageable à un membre du groupe. Les lois des Ila spécifient que si vous invitez quelqu'un pour un voyage, ou si vous le prenez dans un bateau, et s'il lui arrive quelque accident, vous êtes coupable de buditazhi, et l'on peut vous arrêter ou vous détenir pour rançon. En bref, alors que pour nous il peut être facile d'abandonner un rat, c'est une toute autre affaire pour un voyageur Ila.

Nous ne sommes donc pas encore dans le domaine des mathématiques. A quelle condition y pénètre-t-on ?

A partir du moment où l'on impose un défi logique, où le récit fixe un but et spécifie les contraintes sous lesquelles il peut être atteint : le problème, bien qu'exprimé en termes propres au monde réel, ne permet pas de recourir à la panoplie des solutions réalistes. On ne peut pas chercher d'autre bateau, emprunter un pont un peut plus loin…L'histoire délimite nettement les moyens de la solution.

Aventurons-nous donc à partir de cette petite porte, dans l'univers, à la fois familier, et pour quelques uns inquiétant, des mathématiques.

Au Libéria, chez les Kpelle, l'énigme est enchâssée dans un long récit. La scène se passe dans le royaume du roi Tokolo.

Un époux paie au père de l'épouse une dot qui peut être annulée si les parents de l'épouse apprécient tout particulièrement leur beau-fils virtuel.

L'histoire commence lorsqu'un jeune homme demande la main de la fille du roi. Puisque celle-ci consent, le roi promet d'oublier le paiement de la dot, pourvu que le prétendant montre qu'il compte au nombre des « personnes intelligentes ». Pour cela, bien sûr, il doit résoudre un défi posé par le roi. Celui-ci a encagé un guépard, et l'a nourri de volaille en sorte qu'à présent le guépard attrape et mange toute la volaille qui passe à sa portée. Le prétendant doit transporter le guépard, une volaille, et un peu de riz par-delà le fleuve, dans un bateau qui ne transporte qu'une personne et deux charges.

Mais, ajoute le roi, l'homme ne peut contrôler ses passagers tandis qu'il manœuvre le bateau, et donc, ni le guépard et le poulet, ni le poulet et le riz ne peuvent être laissés seuls sur une rive ou ensemble sur le bateau.

Le jeune homme essaie plusieurs solutions ; il est amené à demander l'aide de son père pour remplacer poulet et riz lorsque les solutions échouent ; le père l'aide sur ce plan, mais ne peut contribuer à résoudre l'énigme.

Lorsque nous lisons cette histoire, il convient de garder à l'esprit un thème fort de la culture kpelle : le succès individuel. Il est capital chez eux que le succès soit le fruit de l'effort et de la finesse personnels. Ainsi, le père avise son fils de ce qu'il doit résoudre le problème par lui-même, sans quoi il sera couvert de honte et de railleries. Finalement, après un succès du jeune homme, les deux familles se rejoignent pour une joyeuse cérémonie de mariage.

Qu'auriez-vous fait à la place du jeune homme ?

Voici un autre problème:

Un sultan a fait couvrir de miroirs les sols et les plafonds de sa cour, et les visiteurs paient tribut pour le spectacle qui leur montre des gens au-dessus et en dessous de la pièce. Un visiteur venu d'une autre région refuse de payer et le sultan lui propose un défi : S'il est capable de porter un léopard, une chèvre et quelques feuilles d'arbre au fils du sultan, tribut lui sera payé et il pourra séjourner dans le sultanat. Le prix à payer en cas d'échec sera la mort.

Le fils habite de l'autre côté d'un fleuve et le bateau disponible ne peut porter que le voyageur et deux éléments de la liste.

La contrainte, supplémentaire par rapport au problème précédent, fixée par le sultan est qu'aucune paire ne peut être laissée sur la rive.

La logique triomphe et le voyageur est déclaré bienvenu au pays.

Comment a fait le voyageur ?

On trouve des problèmes similaires en Europe :

Alcuin (735 – 804) aurait proposé à Charlemagne l'énigme suivante :

« On doit transporter un loup, une chèvre et un chou dans un bateau ou l'homme ne peut emporter qu'un seul être. L'homme ne doit laisser seuls ensemble ni le loup et la chèvre ni la chèvre et le chou . »

Pouvez-vous aider Charlemagne ?

On retrouve ce même problème en Afrique avec par exemple une hyène, une chèvre et de l'herbe.

Voici d'autres problèmes de traversée :

« Trois hommes et trois femmes doivent traverser un fleuve à l'aide d'un bateau qui ne peut transporter que deux personnes à la fois. Pour des raisons de bonnes mœurs, on ne peut laisser seuls ensembles un homme et une femme sur une rive. En revanche le bateau peut transporter un homme et une femme à condition qu'il y ait du monde sur chaque rive pour les observer pendant la traversée. »

Comment ces six personnes peuvent-elles traverser ?
(il faut le faire en un minimum de traversées)

Compliquons un peu le problème : désormais, on ne peut même plus faire monter un homme et une femme ensemble sur le bateau.

Pouvez-vous résoudre ce problème ?

Enfin, un dernier problème cité par Emile Fourrey :

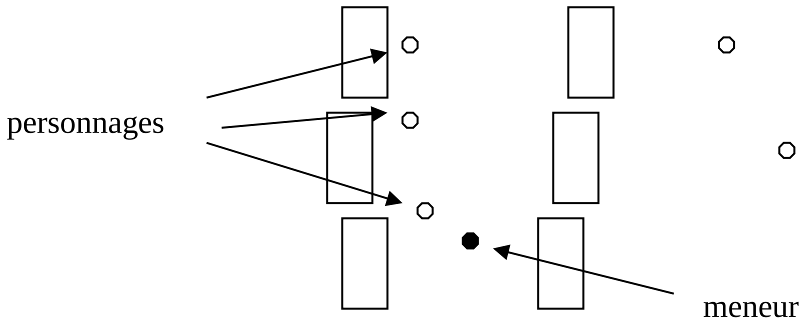
« Trois maîtres, chacun avec son valet, se trouvent sur le bord d'une rivière qu'ils veulent traverser. Ils ont un petit bateau sans batelier, et ne pouvant contenir que deux personnes à la fois. Or chaque maître ne peut souffrir que son valet reste en compagnie des deux autres maîtres, dans la crainte que ceux-ci n'arrivent à se faire révéler, par intimidation, des secrets dont le valet a été le confident. »

Organisation des séances

Le problème 1 est lu par un élève, puis résolu collectivement.

Pour les autres problèmes, les élèves réfléchissent par groupes de 2 ou 3 à l'aide de fèves représentant les différents personnages.

Dès que tous les groupes sont prêts, la salle 307 est réorganisée de la façon suivante :



Les tables figurent les deux rives, le meneur (c'est le seul autorisé à parler) doit faire traverser les différents personnages figurés par autant d'élèves.

Les élèves ne participant pas à la mise en scène doivent lever la main pour interrompre le meneur s'ils pensent que les contraintes sont enfreintes.

Cette façon de procéder à l'avantage de mettre à l'aise les élèves en difficulté par rapport à l'écrit, ce qui est assez fréquent dans cet établissement classé ZEP zone sensible.

Séquence 2 : Trois énigmes arabes

Continuons notre aventure dans le monde mathématiques à travers trois vieilles énigmes arabes.

Ici le récit devient plus court, plus orienté, l'aspect général est plus communément reconnu comme mathématiques. La première de ces énigmes ne peut être résolue uniquement avec des outils mathématiques. On a besoin d'une astuce. La seconde peut être comprise à l'aide d'un simple dessin ; elle ne fait pas appel à des notions mathématiques compliquées, ni à des méthodes mécaniques de résolution. Pour ces deux énigmes, on reste dans le cadre de problèmes à supports concrets (même s'ils ne sont pas réalistes), et l'on est loin de toute théorie ou tentative de théorisation. La troisième, en revanche, ouvre une porte vers l'al-gabr, que nous verrons lors de la quatrième séquence. Ici, on tentera de la résoudre sans outil théorique (et en particulier, sans poser une équation !!!).

Enigme 1

Un père laisse en héritage 17 chameaux à ses 3 fils. L'aîné doit en avoir la moitié, le cadet le tiers, et le benjamin le neuvième. Comment effectuer le partage ?

Les trois fils restent perplexes et vont consulter un cadi qui trouve la solution .

Comment a-t-il fait ?

Enigme 2

Deux hommes, l'un portant 5 pains, l'autre 3 pains, rencontrent dans la campagne un voyageur riche et affamé. Ils déjeunent ensemble, puis le voyageur pour prix de son repas, leur donne 8 pièces d'or. Comment faire le partage ?

Le premier homme réclame 5 pièces pour lui, et 3 pièces pour le second.

Le second, lui, veut que chacun des deux reçoive 4 pièces d'or, il remboursera au premier le prix d'un pain.

Le Cadi, consulté pour trancher le différend, donne 7 pièces au premier et 1 seule au second .

Quel raisonnement a fait le cadi ?

Enigme 3 (posée par Ben Ezra, mathématicien du XI$^{\text{ème}}$ siècle)

« Et si on dit :
Un homme est entré dans un verger et il y a cueilli des fruits.
Mais le verger avait trois portes, gardées chacune par un gardien.
Cet homme donc partagea les fruits avec le premier et lui en donna deux de plus,
puis il partagea avec le deuxième et lui en donna deux de plus,
enfin, il partagea avec le troisième, lui en donna deux de plus,
et il sortit en ayant seulement un fruit. »

Combien de fruits a-t-il cueilli ?

Organisation des séances

Lors de la première séance, les élèves sont répartis par groupes de 2 ou 3 (maximum). Dans un premier temps, ils doivent simplement lire et comprendre les problèmes.

Ensuite, ils sont questionnés, pour s'assurer que l'objet de chaque problème est bien compris.

Puis, chaque groupe doit chercher les solutions des trois énigmes.

Si un groupe n'arrive pas à avancer, il peut demander un indice mais il perd alors 2 points. (il y a trois indices par énigme.)

Dès que les groupes ont fini de chercher, un représentant de chaque groupe vient présenter la solution d'une des énigmes au tableau, à l'aide de feutres, il doit montrer et effectuer les calculs utiles ou les dessins permettant de comprendre la solution.

La solution doit être compréhensible, claire et sans équivoque

Après cette présentation, et uniquement après, les autres groupes sont invités à critiquer les solutions présentées.

Cette méthode vise à montrer que plus on progresse dans les mathématiques, plus l'écrit apparaît comme indispensable. Les deux premières énigmes, d'autre part, font appel aux calculs en écriture fractionnaire, des calculs somme toute assez faciles mais qu'il n'est pas inutile de faire faire et refaire à des élèves de 4ème.

Le travail est évalué et noté sur 20, en fonction de la qualité du travail, de l'investissement des membres du groupe et du nombre d'indices demandés.

Séquence 3 : En route vers l'Al-gabr

Avant de poursuivre notre petit périple, en abordant l'al-gabr, outil extrêmement efficace pour la résolution de nombreux problèmes, voyons trois énigmes et tentons de les résoudre à l'aide du simple bon sens. Ces trois énigmes peuvent être justement résolues par des méthodes systématiques (comme la mise en équation) mais ce n'est pas ce que nous recherchons ici, l'interêt des méthodes des prochaines séquences en sera plus visible.

Enigme 1

« Un homme lègue un héritage à ses deux fils. Il possède 17 sacs de pièces d'or. Chaque sac contient le même nombre de pièces. Il en donne 10 à son aîné et 7 au cadet.

L'aîné qui est très dépensier va immédiatement rembourser ses dettes qui s'élèvent à 70 pièces d'or.

Le cadet, très économe, possédait déjà 56 pièces.

Désormais, les deux fils ont la même quantité d'argent. »

Combien y avait-il de pièces dans les sacs ?

Enigme 2

« Deux voleurs partagent un butin en deux parts de même valeur : le premier prend 10 rubis et 15 pièces d'or et le second 8 rubis et 100 pièces d'or. »

Combien de pièces vaut un rubis ?

Enigme 3

« La moitié de ma bourse et 5 dihrams vaut autant que le tiers de ma bourse et 12 dihrams. »

Combien y a-t-il de dihrams dans ma bourse ?

Organisation des séances

Les élèves sont répartis en groupe de 2 ou 3.

Chaque groupe doit résoudre au moins une des trois énigmes et réaliser une affiche de format A2, au feutre et en couleur, comme celle-ci :

Enoncé du problème

…..

Solution

…..

Pourquoi cette solution convient

…..

Comment nous avons trouvé

…..

Cette fois-ci, les groupes ne peuvent bénéficier d'aucun indice et doivent se débrouiller seuls.

Dés que la phase de recherche est terminée et que les affiches ont été réalisées, elles sont collées salle 307. Chaque groupe évalue alors le travail des autres à l'aide des cadres de la page suivante.

Les différentes critiques émises sont lues par le professeur et donnent lieu à une discussion de synthèse entre tous les groupes, qui doit permettre d'aboutir à une bonne résolution de ces énigmes.

Les affiches seront notées.

N° du groupe : L'affiche est-elle bien présentée ?
La solution proposée convient-elle ? préciser pourquoi elle ne convient pas, le cas échéant.

L'explication est-elle claire et convaincante?

La méthode de résolution choisie est-elle intéressante ? (expliquer pourquoi)

N° du groupe : L'affiche est-elle bien présentée ?
La solution proposée convient-elle ? préciser pourquoi elle ne convient pas, le cas échéant.

L'explication est-elle claire et convaincante?

La méthode de résolution choisie est-elle intéressante ? (expliquer pourquoi)

N° du groupe : L'affiche est-elle bien présentée ?
La solution proposée convient-elle ? préciser pourquoi elle ne convient pas, le cas échéant.

L'explication est-elle claire et convaincante?

La méthode de résolution choisie est-elle intéressante ? (expliquer pourquoi)

Séquence 4 : L’al-gabr et l’almuqabalah

Continuons donc plus avant : voici une méthode automatique de résolution de problèmes, ici les mathématiques se systématisent, on n’est plus dans le cadre d’un problème trop particulier, ou nécessitant une astuce, voire impliquant des conditions culturelles spécifiques. On fait un grand pas vers l’abstraction.

Cette méthode date du IX$^{\text{ème}}$ siècle. Elle est développée en détail dans le *Hisab al gabr w’al muqabalah* écrit en 830. Elle est, en réalité, bien plus élaborée que les exemples ci-dessous car elle permet de résoudre aussi les équations du second degré que les élèves n’aborderont qu’au Lycée.

Nous allons en voir un exemple extrêmement simplifié.

Al Khawarismi utilise deux types de nombres :
- les nombres connus qu’il appelle *dirham* (unité monétaire)
- les nombres inconnus qu’il appelle *shay* (chose)

Il n’utilise pas les nombres négatifs, ni l’écriture décimale (il ne travaille qu’avec des fractions !)

kitab el khawarismi

Résolvons d’abord ces neuf questions préliminaires :

Si *deux* choses valent *six* dihrams alors une chose vaut :

Si *cinq* choses valent *vingt* dihrams alors une chose vaut :

Si *huit* choses valent *quatre cent soixante quatre* dihrams alors une chose vaut :

Si *cinq* choses valent *trois* dihrams alors une chose vaut :

Si *la moitié* d’une chose vaut *trois* dihrams alors une chose vaut :

Si *le tiers* d’une chose vaut *sept* dihrams alors une chose vaut :

Si le *quart* d'une chose vaut *vingt-sept* dihrams alors une chose vaut :

Si les *trois cinquièmes* d'une chose valent *neuf* dihrams alors *le cinquième* en vaut ….. et la chose vaut ….

Si les *cinq huitièmes* d'une chose valent *dix* dihrams alors

Voici comment résoudre le problème d'héritage de la séquence précédente :

« Appelle chose le nombre de pièces dans chaque sac :

10 choses avec une dette de 70 dihrams valent autant que 7 choses auxquelles on ajoute 56 dihrams »

Par l'Al-gabr (qui signifie « réunion de ce qui a été cassé ») on supprime les soustractions (les dettes) pour n'avoir à utiliser que des nombres positifs.

« Ainsi 10 choses valent autant que 7 choses auxquelles on ajoute 56 dihrams et 70 dihrams soit 126 dihrams. »

Par al muqabalah (qui signifie « confrontation ») on rééquilibre les quantités de même nature (les dihrams avec les dihrams et les choses avec les choses) en conservant l'égalité (« valent autant »)

« Entre 10 choses et sept choses, il y a trois choses de plus. »

« Donc 3 choses valent 126 dirhams »

Puis l'on divise par 3

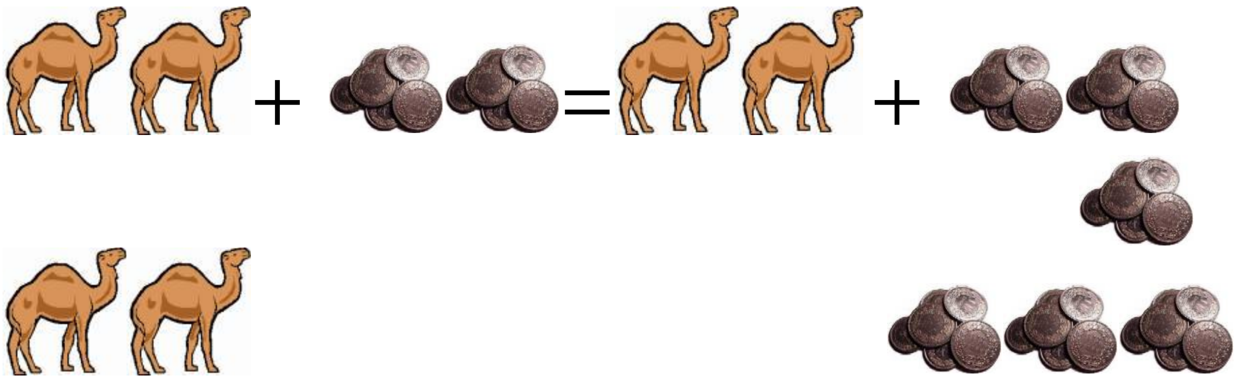
« Une chose vaut …….. dirhams

Il y avait donc ….. pièces dans chaque sac. »

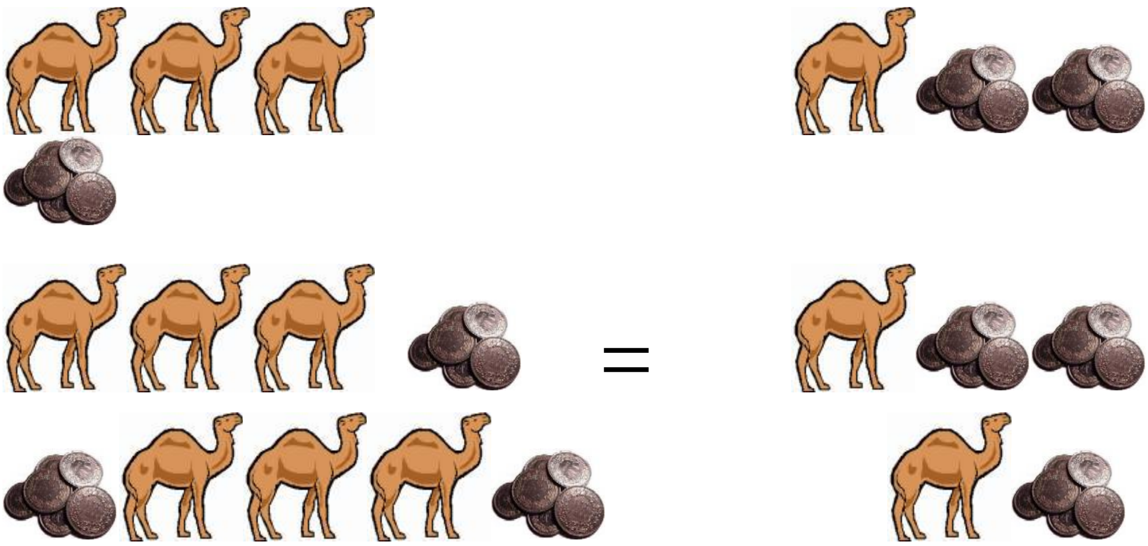
Application :

Trouver le prix des chameaux dans les problèmes suivants à l'aide de la méthode d'Al-Khawarismi, sachant qu' à l'intérieur d'un même problème tous les chameaux coûtent le même prix et que tous les tas de pièces représentent 6 dihrams :

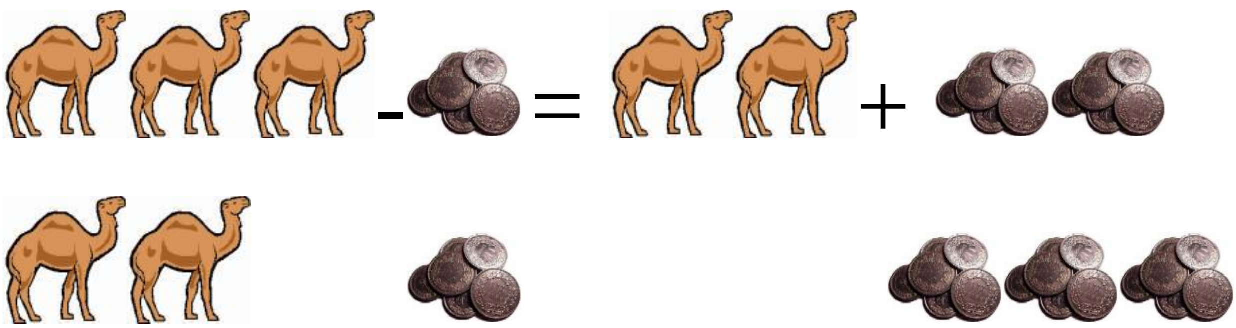
Problème 1 : (on peut passer directement à l'al-muqabalah)



Problème 2 : (ici, on peut faire directement l'al-muqabalah)



Problème 3 :(ici, il faut faire l'al-gabr d'abord)



Résoudre les deux autres problèmes de la séquence précédente à l'aide de la méthode d'Al-Khawarismi.

Et pour finir, voici un problème d'Abû Nuwas (750 ?-815 ?) qui est actuellement affiché dans le métro parisien :
« Janân a pris mon cœur dont il ne reste rien :
Les deux tiers de mon cœur et les deux tiers du reste et les deux tiers du dernier reste.
Au serveur leste, le tiers du tiers.
Six parts pour les amants enfin. »

Combien de parts avait son cœur ?

Organisation de la séance

Les élèves sont repartis en groupe de 2 ou 3.

La résolution des problèmes des prix des chameaux est faite sur ce cahier puis corrigée en classe.

Une fois la méthode bien maîtrisée, chaque groupe doit résoudre les deux problèmes de la séquence précédente, en rédigeant entièrement la résolution, suivant la méthode d'Al-Khawarismi, sur une affiche. L'affiche est évaluée et notée.

Séquence 4 : Mise en équation et résolution d'équations du 1er degré à une inconnue

Voici la dernière étape de notre petit voyage, cette méthode est très proche de celle d'Alkhawarismi. Elle utilise des symboles mathématiques (+ - x : = et x) et s'embarrasse le moins possible de phrases, elle est donc beaucoup plus rapide à rédiger.

L'usage des lettres apparaît avec Viète, mathématicien français de la fin du XVIe siècle.

On entre de plein pied dans la symbolisation ; les mathématiques se sont dépouillées de considérations qui leur sont étrangères. Le mot <u>*shay*</u> (chose) est devenu **ش**(*shin* lettre arabe pour le son ch) puis **س**(*sin* : lettre arabe équivalent à s) et enfin **A** puis x en Europe *Trois choses* se note désormais $3x$. On est loin de l'énigme des Ila.

Cette méthode ne permet évidemment pas de résoudre tous les problèmes contrairement à ce que croyait Viète, mais rares sont les domaines des mathématiques, que ce soit en algèbre, en analyse, en géométrie, en physique, en économie, qui échappent au règne du ***x***.

Avant de voir cette méthode, résolvons quelques questions préliminaires :

<u>Exercice 1</u>

Compléter les carrés blancs afin d'obtenir des égalités vraies :

$\square$ + 3 = 12	$\square$ + 18 = 32	$\square$ + 53 = 7
$\square$ - 3 = 18	$\square$ - 25 = 32	$\square$ -154 = -78
$\square$ x 3 = 12	$\square$ x 4 = 81	$\square$ x (-3) = 7
$\square$ / 3 = 12	$\square$ / 4 = -81	$\square$ / (-3) = -7

<u>Exercice 2 :</u> résoudre les équations

$$x+7=12$$

$$x-4=8$$

$$x+15,3=-7,6$$

$$x-13,2=-4$$

$$5x=16$$

$$-2x=8$$

$$7x=3$$

:

$$\frac{x}{8}=15$$

$$\frac{3x}{5}=2$$

$$\frac{2}{3}x=5$$

Exercice 3
Réduire les expressions suivantes :

$$3x+2x=$$

$$6x+4-3x+2=$$

$$15x-3x+15=$$

$$3x-2x+6-x=$$

$$4x-5-5x+5=$$

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+1=$$

$$\frac{3x}{4}-\frac{7}{3}+\frac{1}{8}x+\frac{2}{3}=$$

Exercice 4
Développer et réduire les expressions suivantes :

$$2(3x+4)=$$

$$5(4x-2)=$$

$$(3x+2)\times 7=$$

$$(-6x+11)\times(-3)=$$

$$(4x-3)\times 7+5(12x-5)=$$

$$3x+7(2x+5)-3\times 2x=$$

$$15x-5(3x+2)=$$

$$(8x-4)\times 2-3(5x-3)=$$

$$\frac{3}{4}(\frac{2}{5}x+\frac{1}{2})=$$

Méthode de mise en équation

1 On appelle x la quantité que l'on recherche

2 On cherche à établir une égalité (équation) qui permettra de déterminer la valeur de l'inconnue x à partir des relations exprimées dans le problème.

Méthode de résolution

Résoudre une équation d'inconnue x , c'est trouver toutes les valeurs que l'on peut donner à x
Pour que l'égalité soit vraie.
Pour résoudre une équation du premier degré à une inconnue on utilise deux règles :

Règle n°1
On conserve une égalité
Si on ajoute (ou retranche) un même nombre à chaque membre

Ex :

$$\begin{array}{ccccc} & 5x + 2 & = & 4x + 3 & \\ -2 & & & & -2 \\ & 5x & = & 4x + 1 & \end{array}$$

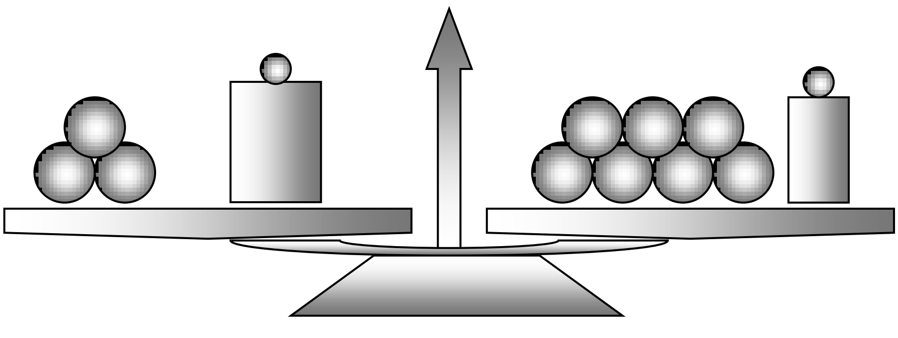
Règle n°2
On conserve une égalité
Si on multiplie (ou divise) par un même nombre (sauf 0) les deux membres

Ex :

$$\begin{array}{ccccc} & 5x & = & 3 & \\ :5 & & & & :5 \\ & x & = & \frac{3}{5} & \end{array}$$

Exemple :

La balance suivante est équilibrée, chaque boule pèse le même poids. Le gros poids pèse 50 grammes et le petit 25 grammes. Combien pèse une seule boule ?



Posons x = poids d'une boule
Quel est le poids total sur le plateau gauche ?
Quel est le poids total sur le plateau droit ?

En déduire l'équation qui permet de résoudre ce problème :

Nous allons maintenant « isoler » l'inconnue x :

$$6x + 25 = 3x + 50$$

on supprime 25 à gauche de l'égalité

on supprime 3x à droite de l'égalité

on résoud l'équation ax=b

Conclusion :

<u>Exercice</u>

Isoler x de la même manière dans les trois équations suivantes :

$$14x - 3 = 6x + 15$$

$$2x - 8 = 10x$$

$$\frac{x - 3}{2} = 5x - 4$$

Nous allons maintenant mettre en pratique cette méthode, dans plusieurs domaines différents :

Deux énigmes

Problème de Luca Pacioli (XV^{ème} siècle)

Partager 44 ducats entre trois personnes de façon que la deuxième ait le double de la première plus 4 et la troisième autant que les deux autres réunies plus 6.

Appeler x ce que reçoit la première personne :
Combien reçoit la seconde (exprimer le résultat en fonction de x) ?
Combien reçoit la troisième (exprimer le résultat en fonction de x) ?
Combien cela fait-il en tout ?
Conclure :

Dans un campement, il y a des hommes et des chameaux. On compte en tout 220 jambes et 61 têtes. Combien y a-t-il d'hommes ?

On appelle x le nombre d'hommes.
Combien y a-t-il de chameaux (exprimer le résultat en fonction de x) ?
Combien de pieds ont tous les hommes réunis (exprimer le résultat en fonction de x) ?
Combien de pieds ont tous les chameaux réunis (exprimer le résultat en fonction de x) ?
Combien cela fait il de pieds en tout (exprimer le résultat en fonction de x) ?
Conclusion :

Trois problèmes numériques

Je pense à un nombre, je le multiplie par 7 et j'ajoute 3, cela donne le double du nombre du départ. A quel nombre ai-je pensé ?

Trouver cinq nombres consécutifs, dont la somme vaut un million.

Appeler x le premier nombre
Quel est le nombre suivant ?
Le suivant de ce dernier ?
Le suivant de ce dernier ?
Le suivant de ce dernier ?
Que vaut la somme de ces cinq nombres ?
Conclusion :

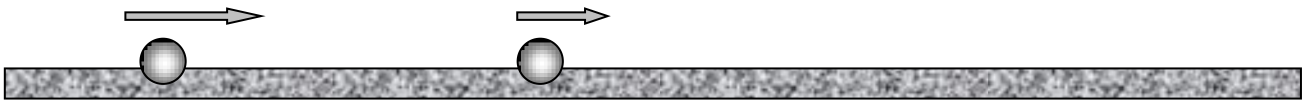
Voici un très vieux problème du papyrus Rhind, l'un des plus vieux documents mathématique connu, il a été rédigé en Egypte, il y a presque 4000 ans :

Une quantité, ses $\frac{2}{3}$, *son* $\frac{1}{2}$ *et son* $\frac{1}{7}$ *ajoutés devient 33. Quelle est cette quantité ?*

Deux problèmes de sciences physiques

1 cm^3 d'argent pèse 10,5g *1 cm^3 de cuivre pèse 8,9 g* *On veut réaliser un alliage tel que 1 cm^3 pèse 10g* *Quelle volume de cuivre doit-il y a avoir dans 1 cm^3 de cet alliage ?*

Poser x = volume de cuivre (en cm^3) dans l'alliage
Quel est le volume d'argent (en cm^3) dans l'alliage ?
Quel est alors le poids du cuivre ?
Quel est le poids de l'argent ?
En déduire le poids de l'alliage :



Une balle est à 5m d'un observateur et s'éloigne de lui à la vitesse de 2 mètres par seconde. *Une autre balle est à 2m et se déplace sur la même ligne, à la vitesse de 3,4 mètres par seconde.* *Dans combien de temps la seconde balle va-t-elle rattraper la première ? (on négligera leur diamètre)*

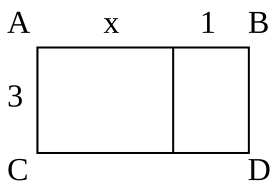
Poser x = le temps en seconde

A quelle distance est la première balle au bout de 1 seconde ?
A quelle distance est la première balle au bout de 2 secondes ?
A quelle distance est la première balle au bout de 12 secondes ?
A quelle distance est la première balle au bout de x secondes ?

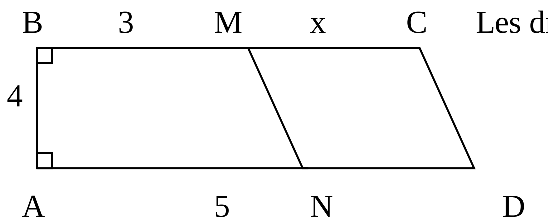
A quelle distance est la seconde balle au bout de 1 seconde ?
A quelle distance est la seconde balle au bout de 2 secondes ?
A quelle distance est la seconde balle au bout de 12 secondes ?
A quelle distance est la seconde balle au bout de x secondes ?

En déduire le nombre de secondes pour que les deux balles soient à la même distance :

Problèmes géométriques



Pour quelle valeur de x l'aire du rectangle ABDC est-elle égale à son périmètre ?



Les droites (MN) et (CD) sont parallèles.

Trouver la valeur de x pour que l'aire du parallélogramme MCDN soit égale à la moitié de celle du trapèze BCDA.

Deux problèmes économiques

Utrillophone

Abonnement mensuel : 15 €
Prix de la minute : 0,04 €

Allo Maurice ?

12 € par mois
0,05 € la minute

Combien de minutes par mois faut-il téléphoner pour que les deux formules reviennent au même prix ?

Une compagnie de chemins de fer propose deux cartes.
La carte réduc coûte 20 € et permet de voyager pour 12 c du kilomètre.
La carte superréduc coûte 35 € et permet de voyager pour 10 c du kilomètre

Combien faut-il faire de kilomètres pour que les deux solutions soient équivalentes ?

Problèmes de moyennes

Dans un collège, on fait passer trois épreuves :
- *maths : coefficient 2 ;*
- *français : coefficient 2 ;*
- *histoire-géographie : coefficient 1 ;*

Un élève a eu 12 en Français et 14 en histoire-géographie. Quel note lui faut-il obtenir en maths pour que sa moyenne aux trois épreuves soit 14 ?

(calculer sa moyenne en prenant x pour la note de maths)

Dans un autre collège, le professeur de mathématiques a fait 4 interrogations. Il a appliqué les coefficients suivants : -
- *note 1 : coefficient 1*
- *note 2 : coefficient 2*
- *note 3 : coefficient 1*
- *note 4 : coefficient ???*

Un élève a eu 11,5 – 12 – 11 et 06 (toutes ces notes sont sur 20) et il a eu 11 de moyenne.
Quel est le coefficient de la note 4 ?

(calculer sa moyenne en appliquant un coefficient x)

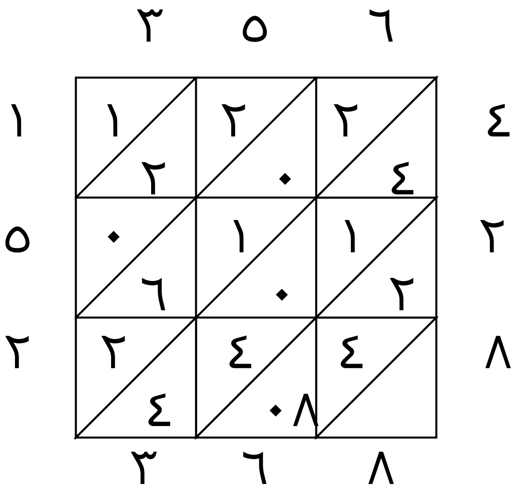
Autres énigmes

On peut tenter à nouveau de résoudre, à l'aide de cette méthode, les énigmes des séquences précédentes.

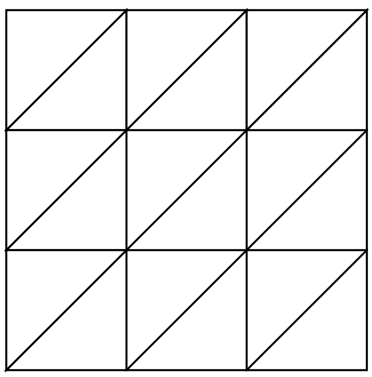
La multiplication per gelosia

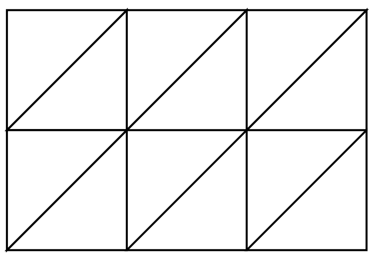
Voici une technique arabe pour multiplier 356 par 428

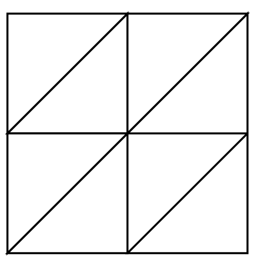
D'après mes informations, l'enseignement des mathématiques arabes traditionnelles existe encore en Mauritanie, il n'est donc pas impossible que, si nous y allons, nous rencontrions des personnes travaillant avec l'Al-gabr. La multiplication per gelosia y est peut-être aussi utilisée.



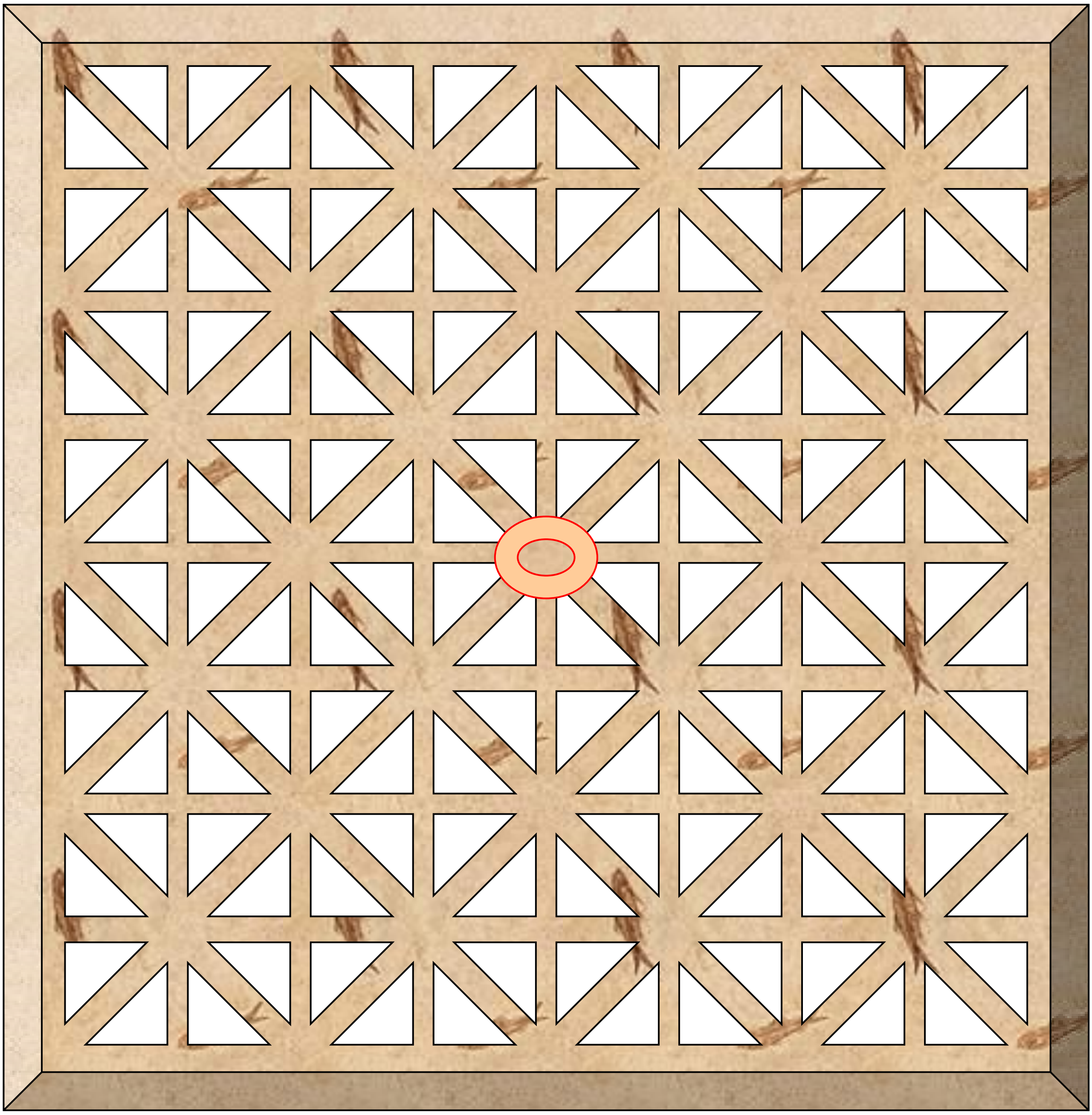
En utilisant les cadres suivants, calculer de même :
275 multiplié par 478
987 multiplié par 35
47 multiplié par 89







LE SRAND   Jeu Mauritanien



Le srand fait partie des ancêtres du jeu de dames, il s'apparente à l'alquerque et au zamma (jeux du sahara).

Chaque joueur place 36 pions sur les intersections situées de son côté, puis 4 pions à droite de la case centrale (signalée par un cercle) qui est laissée libre. (il a donc 40 pions en tout)

Les noirs commencent. Les pions ne peuvent qu'avancer d'un seul pas, devant eux ou en diagonale. Reculs et déplacement latéraux ne sont pas autorisés.

Seules les prises peuvent s'effectuer en tout sens, elles se pratiquent comme aux dames. Les prises sont obligatoires et doivent être enchaînées si possible.

Un pion qui parvient sur la ligne du fond est promu sultan ; il est repéré par un double pion et se comporte comme un pion promu dame au jeu de dames.

Le gagnant est celui qui a capturé le plus de pièces adverses ou les a bloquées.