

Introduction de la fonction exponentielle – Méthode d'Euler

Compétence TICE visée : Utilisation du tableur (d'OpenOffice)

Compétences mathématiques : Approximation affine
Suites

Etant donnée une fonction f définie sur un intervalle $I = [x_0, x_n]$ et un réel y_0 .
On cherche : une fonction F , dérivable sur I , telle que $F(x_0) = y_0$ et $F'(x) = f(x)$ pour tout x de I .

Principe de la méthode d'Euler :

Lorsqu'on ne sait pas trouver une formule explicite de $F(x)$, la méthode d'Euler permet de tracer une courbe approchée de celle de F .

Propriété de la dérivée :

Si F est une fonction dérivable sur un intervalle I et x_i un réel de I .

Pour tout réel h non nul et proche de 0 tel que $x_i + h$ soit dans I on a :

$$F(x_i + h) \approx F(x_i) + h F'(x_i)$$

Méthode d'Euler :

$A_0(x_0; y_0)$ est le premier point de la courbe (C) représentative de F .

Soit h un réel non nul, proche de 0; en général on divise I en n intervalles et on choisit

$$h = \frac{x_n - x_0}{n}.$$

Pour les n valeurs $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h$, ..., $x_n = x_{n-1} + h$, on calcule de proche en proche, grâce à la propriété de la dérivée citée ci-dessus, les n valeurs approchées de $F(x_1)$, $F(x_2)$, ..., $F(x_n)$.

En effet F est dérivable en x_0 donc :

$$F(x_0 + h) \approx F(x_0) + h F'(x_0) \text{ soit } F(x_1) \approx y_0 + h f(x_0).$$

En calculant $y_1 = y_0 + h f(x_0)$ on obtient $F(x_1) \approx y_1$.

On recommence en x_1 avec :

$$F(x_1 + h) \approx F(x_1) + h F'(x_1) \text{ soit } F(x_2) \approx y_2 = y_1 + h f(x_1).$$

Et ainsi de suite on répète n itérations jusqu'à $y_n = y_{n-1} + h f(x_{n-1})$.

Applications :

On cherche une solution approchée de l'équation différentielle $f' = f$ et $f(0) = 1$ sur l'intervalle $[0;1]$.

On découpe l'intervalle $[0;1]$ en n intervalles de longueur $\frac{1}{n}$ (n étant un nombre entier naturel non nul) et on note $t_0 = 0$, t_1 , t_2 , ..., $t_n = 1$ les points de la subdivision rangés dans l'ordre croissant.

But : calculer les valeurs approchées y_0, y_1, \dots, y_n des nombres $f(t_0), f(t_1), \dots, f(t_n)$ à l'aide de la méthode d'Euler.

Partie A :

Comme $f(0) = 1$, on pose $y_0 = 1$.

1°) Montrer que l'approximation affine de $f\left(t_0 + \frac{1}{n}\right)$ est $1 + \frac{1}{n}$.

2°) On suppose que les valeurs y_1, \dots, y_k sont connues (k étant un nombre entier naturel inférieur à n)

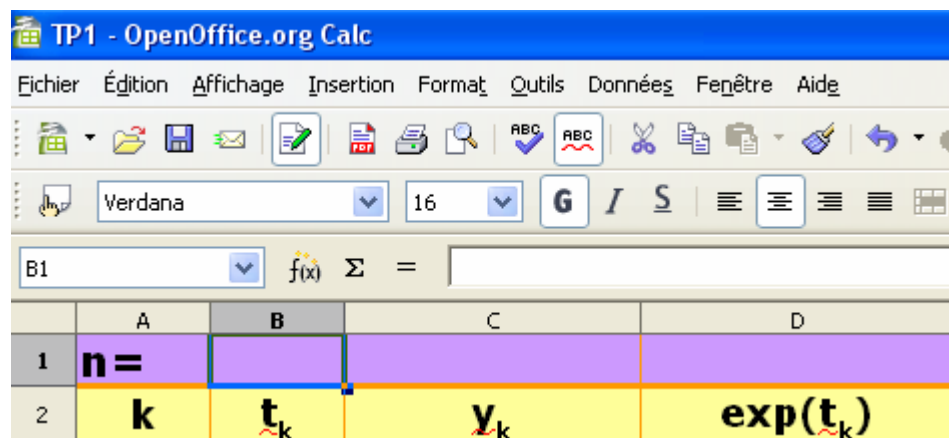
a) Montrer que l'approximation affine de $f\left(t_k + \frac{1}{n}\right)$ est égale à $f\left(t_k\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

On pose $y_{k+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)y_k$. Quelle est la nature de la suite $(y_k)_{0 \leq k \leq n}$?

b) En déduire que pour tout entier naturel k inférieur ou égal à n : $y_k = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k$

Partie B : Tableau

1°) Ouvrir une feuille de calcul avec le logiciel OpenOffice.org calc (tableur) et saisir :



2°) a) Saisir dans B1 la valeur de n (on commence par $n=10$).

b) Saisir 0 dans A3 et 1 dans A4 puis recopier ces cellules vers le bas afin de faire afficher les valeurs de k jusqu'à n .

c) Dans la cellule B3, saisir la valeur de t_0 et dans B4 la formule $B3+1/ \$B\1 et recopier cette formule vers le bas jusqu'à obtenir la valeur 1.

Remarques :

Ne pas oublier qu'une formule commence toujours par =

Le \$ sert à fixer la lettre B et l'indice 1 lorsqu'on recopie la formule.

d) Saisir dans C3 la valeur 1 puis dans C4 la formule $=\text{PUISSANCE}(1+1/ \$B\$1; A4)$

e) Saisir dans D3 : « =Exp(B3) » et recopier cette formule vers le bas.

3°) A l'aide de l'assistant graphique, faire afficher les points de coordonnées $(t_k; y_k)$ puis $(t_k; \exp(t_k))$. Quelle remarque peut-on faire ?

3°) Faire de même avec $n=50$ puis $n=100$. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près du nombre e .