

Chapitre A1 : Introduction de la fonction exponentielle et de la fonction logarithme népérien – Initiation au raisonnement par récurrence

Durée : 5 semaines	Séquence I
Démonstrations :	Tice : 1

Objectifs du chapitre :

- 1) *Introduire la fonction exponentielle, en particulier pour l'étude de certains phénomènes en physique et la notion d'équation différentielle pour modéliser un problème. Introduire la fonction logarithme népérien utilisée très tôt en sciences physiques.*
- 2) *Présenter l'axiome du raisonnement par récurrence très utile dans de nombreuses situations.*
- 3) *Mobiliser les connaissances de 1^{ère} (dérivation, suites numériques,...) pour construire une nouvelle notion sur laquelle on reviendra régulièrement.*

Points du programme visés :

Contenus	Modalités de mise en oeuvre	Commentaires
<p>Étude de l'équation $f' = kf$. Théorème : "il existe une unique fonction f dérivable sur \mathbb{R} telle que $f' = kf$ et $f(0) = 1$." Relation fonctionnelle caractéristique. Introduction du nombre e. Notation e^x. Extension du théorème pour l'équation $f' = kf$.</p>	<p>L'étude de ce problème pourra être motivée par un ou deux exemples, dont celui de la radioactivité traité en physique, ou par la recherche des fonctions dérivables f telles que $f(x+y) = f(x)f(y)$. On construira avec la méthode d'Euler introduite en première des représentations graphiques approchées de f dans le cas $k = 1$; on comparera divers tracés obtenus avec des pas de plus en plus petits. L'unicité sera démontrée. L'existence sera admise dans un premier temps. Elle sera établie ultérieurement à l'occasion de la quadrature de l'hyperbole. Approximation affine, au voisinage de 0, de $h \mapsto e^h$.</p>	<p>Ce travail se fera très tôt dans l'année car il est central dans le programme de mathématiques et de physique. Il fournit un premier contact avec la notion d'équation différentielle et montre comment étudier une fonction dont on ne connaît pas une formule explicite. La méthode d'Euler fait apparaître une suite géométrique et donne l'idée que l'exponentielle est l'analogue continu de la notion de suite géométrique, ce que l'équation fonctionnelle confirme.</p>
Suites et récurrence		
Raisonnement par récurrence		On présentera le principe de récurrence comme un axiome.

1) Introduction :

Désintégration radioactive

Qu'est-ce que la radioactivité ?

La matière est faite d'atomes, la plupart du temps assemblés en molécules. Au cœur de ces atomes, se trouve un noyau, 10 000 à 100 000 fois plus petit. La radioactivité est un phénomène qui se produit au plus profond des atomes, dans ce noyau. Le phénomène est difficile à observer : il a fallu attendre 1896 pour que soient décelés des rayonnements d'origine inconnue, émis par des sels d'uranium. Certains noyaux atomiques instables sont la source de rayonnements, désignés par les trois premières lettres de l'alphabet grec : alpha (α), bêta (β) et gamma (γ). Ces rayonnements sont des particules émises par des noyaux avec une grande énergie. Les rayons α sont des noyaux légers d'hélium, les rayons β des électrons négatifs ou positifs et les rayons γ des photons de grande énergie. Pour quelles raisons certains noyaux sont-ils instables ? Pourquoi émettent-ils un rayonnement plutôt qu'un autre ? À quel rythme se désintègrent-ils et pendant combien de temps ? Comment mesure-t-on leur degré de radioactivité ? Quelle est l'origine de ces rayonnements auxquels nous sommes soumis ? Quels sont les principaux corps radioactifs ? (**source : la radioactivité.com**)

Ces questions seront étudiées en Physique.

La désintégration des atomes d'un corps radioactif est telle que, à chaque instant, la vitesse de désintégration est proportionnelle à la quantité restante de substance radioactive..

Soit $N(t)$ le nombre d'atomes à l'instant t , Δt une durée proche de 0 et $\Delta N(t)$ la diminution du nombre d'atomes durant Δt .

La loi de désintégration s'écrit : $\frac{\Delta N(t)}{\Delta t} = -\lambda N(t)$ (λ étant la constante radioactive de

ce corps, λ est un réel positif)

La présence du signe "-" indique que N décroît lorsque t augmente.

A priori, λ pourrait dépendre du temps. Ce serait le cas si un processus de vieillissement était en cause, comme, par exemple, si l'on s'intéresse au nombre de décès dans une population donnée.

Le fait que λ ne dépende pas du temps s'interprète comme un processus de « mort sans vieillissement ».

Comme le nombre d'atomes est très grand, les physiciens modélisent la situation en considérant que le nombre d'atomes est une fonction dérivable par rapport à la variable t .

Ainsi,

$$\frac{\Delta N(t)}{\Delta t} = -\lambda N(t) \text{ devient } N'(t) = -\lambda N(t)$$

A l'instant $t = 0$, le nombre d'atomes est $N_0 = N(0)$: cette égalité constitue une condition initiale.

La fonction N est donc solution sur \mathbb{R}_+ de l'équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre avec condition initiale :

$$\begin{cases} y' = -\lambda y \\ y(0) = N_0 \end{cases}$$

où y est une fonction.

Remarques :

Δt représente la différence entre deux instants très proches t_1 et t_2 .

$\Delta N(t) = N(t_1) - N(t_2)$ est la différence correspondante.

On a donc une équation portant sur les différences, d'où le nom d'équation différentielle

2) Activités préparatoires :

Travail sur la notion de dérivée pour remobiliser les connaissances.

3) Définition :

a) Activité 1 :

Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

1°) Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = f(x) \times f(-x)$.

a) Compléter le théorème de dérivation suivant :

Si u est une fonction dérivable sur D , en tout réel x tels que $ax+b \in D$, la fonction $x \mapsto u(ax+b)$ est dérivable et : $(u(ax+b))' = \dots$

b) Démontrer que la fonction g est constante sur \mathbb{R} puis déterminer cette constante.

c) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$.

2°) Soit h une fonction dérivable sur \mathbb{R} telle que $h' = h$ et $h(0) = 1$.

On pose k la fonction définie sur \mathbb{R} par : $k(x) = \frac{h(x)}{f(x)}$.

Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = f(x)$.

b) Propriété –définition 1 :

Il existe une unique fonction f , définie et dérivable sur \mathbb{R} , telle que :

$$f' = f \text{ et } f(0) = 1$$

Cette fonction, notée \exp , est appelée **fonction exponentielle**.

Ce qui signifie aussi :

L'équation différentielle avec condition initiale $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ admet pour unique solution la fonction \exp

Preuve : (R.O.C)

L'existence d'une fonction f vérifiant les conditions $f' = f$ et $f(0) = 1$ est admise. On la note \exp .

Démontrons son unicité :

Pour cela démontrons que pour tout réel x , on a $\exp(x) \neq 0$ et que $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

Considérons la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \exp(x) \times \exp(-x)$

Montrons que g est dérivable sur \mathbb{R} :

$x \mapsto \exp(-x)$ est la composée de la fonction \exp et de la fonction $x \mapsto -x$

Ces deux fonctions étant dérivables sur \mathbb{R} , $x \mapsto \exp(-x)$ est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x , on a :

$$[\exp(-x)]' = -1 \times \exp'(-x) = -\exp(-x)$$

g est le produit de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} , donc g est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$g'(x) = [\exp(x)]' \times \exp(-x) + [\exp(x)] \times [\exp(-x)]' = \exp(x) \times \exp(-x) + \exp(x) \times [-\exp(-x)] = 0$$

On en déduit que la fonction g est constante sur \mathbb{R} .

On a $g(0) = \exp(0) \times \exp(-0) = \exp(0) \times \exp(0) = 1 \times 1 = 1$.
 Puisque g est constante sur \mathbb{R} , on en déduit que $g(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
 c'est-à-dire que $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
 Ainsi $\exp(x) \neq 0$ et $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Considérons une fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} , telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$
 $\exp(x)$ étant différent de 0 pour tout réel x , on peut considérer la fonction h définie sur \mathbb{R} par
 $h(x) = \frac{f(x)}{\exp(x)}$

h est le quotient de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} , donc h est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$h'(x) = \frac{f'(x) \times \exp(x) - f(x) \times \exp'(x)}{[\exp(x)]^2} = \frac{f(x) \times \exp(x) - f(x) \times \exp(x)}{[\exp(x)]^2} = 0$$

h est donc une fonction constante sur \mathbb{R} .

D'autre part on a $h(0) = \frac{g(0)}{\exp(0)} = \frac{1}{1} = 1$

Donc pour tout réel x on a :

$$h(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{\exp(x)} = 1 \Leftrightarrow f(x) = \exp(x)$$

On en déduit alors l'unicité de la fonction \exp .

Remarque :

Etymologie : **EXPONENTIELLE** (adjectif ou nom féminin) du latin *exponens* : dont l'exposant est variable ou inconnu.

4) Méthode d'Euler – approximation affine de \exp en 0 :

Le TP n°1 permettra de construire des courbes approchant celle de la fonction exponentielle.

Pour h proche de 0, $\exp(x_0 + h) \approx (1 + h) \exp(x_0)$

Ainsi, pour $x_0 = 0$ et $h > 0$, on obtient $\exp(h) \approx 1 + h$, puis $\exp(2h) \approx (1 + h)^2$ et ainsi de suite :

$$\exp(nh) \approx (1 + h)^n \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

On remarque que les termes de la suite définie sur \mathbb{N} par $\exp(nh)$ sont peu différents des termes de la suite géométrique définie par $(1 + h)^n$.

La fonction exponentielle apparaît comme une sorte de "prolongement continue" des suites géométriques.

Propriété :

Pour x proche de 0 : $\exp(x) \approx 1 + x$

5) Equation différentielle $f' = kf$:

Résoudre dans un intervalle I l'équation différentielle $f' = kf$ ($k \neq 0$) d'inconnue la fonction f , c'est trouver toutes les fonctions f dérivables sur I , telles que pour tout x de I , $f'(x) = kf(x)$
 Une telle fonction est dite solution sur I de l'équation différentielle $f' = kf$

a) Propriété 2 :

Les solutions dans \mathbb{R} de l'équation différentielle $f' = kf$ ($k \neq 0$) sont les fonctions f définies par $f(x) = C \exp(kx)$ où $C \in \mathbb{R}$.

Preuve : (R.O.C)

Pour tout réel C , $f'(x) = Ck \exp(kx) = kf(x)$. Ainsi f est solution de l'équation différentielle $f' = kf$.

Démontrons que les fonctions f définies par $f(x) = C \exp(kx)$ où $C \in \mathbb{R}$ sont les seules solutions :

Pour cela, supposons qu'une fonction g soit solution de $f' = kf$ et notons h la fonction définie pour tout réel x par $h(x) = g(x) \exp(-kx)$

La fonction h est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x , on a :

$$h'(x) = \exp(-kx)(g'(x) - kg(x)).$$

Or g est solution de $f' = kf$, ainsi pour tout réel x , on a $g'(x) = kg(x)$ et $h'(x) = 0$.

On en déduit que la fonction h est constante sur \mathbb{R} .

Il existe donc un réel C tel que pour tout réel x , $h(x) = C$

Ainsi pour tout réel x , on a $g(x) = C \exp(kx)$.

b) Propriété 3 (condition initiale) :

Pour tout couple de réel $(x_0; y_0)$, l'équation $y' = ky$ ($k \neq 0$) admet une solution unique f telle que $f(x_0) = y_0$

Preuve :

$$f(x_0) = y_0 \Leftrightarrow C \exp(kx_0) = y_0$$

Ainsi il n'y a qu'une seule valeur possible pour C et $C = y_0 \exp(-kx_0)$.

La fonction f est donc définie sur \mathbb{R} par $f(x) = y_0 \exp(k(x-x_0))$

c) Exemple :

Résoudre l'équation différentielle $f' = 2f$ et $f(1) = 2$.

II. Relation fonctionnelle – Notation e^x

1) Activité 2 :

a) Soit f une fonction non nulle et dérivable sur \mathbb{R} telle que, pour tous x et y de \mathbb{R} ,

$$f(x+y) = f(x) \times f(y).$$

Démontrer que, pour tout x de \mathbb{R} , $f(x) = \exp(kx)$, $k \in \mathbb{R}$.

b) Réciproquement : Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par, $f(x) = \exp(kx)$, $k \in \mathbb{R}$.

Démontrer que, pour tous x et y de \mathbb{R} , $f(x+y) = f(x) \times f(y)$.

2) Propriété 4 :

Pour tous réels x et y , on a : $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$

La fonction exponentielle est donc une fonction transformant une somme en un produit

Preuve : (R.O.C)

Soit y un nombre réel fixé, on a vu que $\exp(y) \neq 0$

Considérons la fonction g de la variable réelle x , définie par $g(x) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(y)}$

Montrons que g est dérivable sur \mathbb{R} .

y étant considéré comme une constante, la fonction $x \mapsto \exp(x+y)$ est la composée de la fonction exponentielle et de la fonction $x \mapsto x+y$

Ces deux fonctions étant dérivables sur \mathbb{R} , on en déduit que $x \mapsto \exp(x+y)$ est dérivable sur \mathbb{R} , et pour tout réel x , on a :

$$[\exp(x+y)]' = (x+y)' \times \exp'(x+y) = 1 \times \exp(x+y) = \exp(x+y)$$

D'autre part y étant considérée comme une constante, $\exp(y)$ est aussi une constante donc g est dérivable sur \mathbb{R} , et pour tout réel x , on a :

$$g'(x) = \frac{[\exp(x+y)]'}{\exp(y)} = \frac{\exp(x+y)}{\exp(y)} = g(x)$$

De plus on a $g(0) = \frac{\exp(0+y)}{\exp(y)} = \frac{\exp(y)}{\exp(y)} = 1$

g est donc une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} , telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$

g est donc la fonction exponentielle (puisqu'on a démontré l'unicité de la fonction vérifiant ces conditions)

On en déduit que pour tout réel x , $g(x) = \exp(x)$ c'est-à-dire $\frac{\exp(x+y)}{\exp(y)} = \exp(x)$

Ceci ayant été démontré quel que soit le réel y , on a justifié que :

Pour tous réels x et y , on a $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$

Remarques :

❶ La fonction exponentielle est la seule fonction vérifiant :

- f est dérivable sur \mathbb{R}

- $f'(0) = f'(0) = 1$

- pour tous réels x et y , $f(x+y) = f(x) \times f(y)$

❷ En remplaçant x et y par $\frac{x}{2}$: $\exp\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \exp^2\left(\frac{x}{2}\right)$, donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0}$$

❸ En appliquant la relation précédente avec $y = x$, on obtient :

$$\exp(2x) = [\exp(x)]^2$$

En appliquant de nouveau la relation avec $y = 2x$, on obtient :

$$\exp(3x) = \exp(2x) \times \exp(x) = [\exp(x)]^3$$

On peut alors démontrer que pour tout entier naturel n , on a : $\exp(nx) = [\exp(x)]^n$

On en déduit en particulier que pour tout entier naturel n , on a :

$$\exp(n) = \exp(n \times 1) = [\exp(1)]^n$$

On note e le nombre $\exp(1)$, alors pour tout entier naturel n , on a : $\exp(n) = e^n$

(relation que l'on peut aussi vérifier pour un entier négatif)

39 Notation e^x :

a) Notation

On conviendra de noter pour tout réel x : $\exp(x) = e^x$ où $e = \exp(1)$
La fonction exponentielle est alors définie par :

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto e^x \end{aligned}$$

Remarques:

- e^x se lit « exponentielle de x » ou « e exposant x ».
- Le nombre $e = \exp(1)$ a pour valeur approchée 2,718 (se trouve avec la méthode d'Euler) ; e est la première lettre d'Euler.
- La notation e^2 a donc une double signification : soit le nombre e élevé au carré, soit le nombre $\exp(2)$. (Ces deux nombres étant égaux)
- Par contre la notation e^π ne peut désigner que le nombre $\exp(\pi)$.

b) Propriété 5 :

Pour tous réels a et b , on a :

❶ $e^{a+b} = e^a e^b$ (On peut généraliser cette propriété à plusieurs nombres)

❷ $e^{-b} = \frac{1}{e^b}$

❸ $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

Preuve:

- x et y étant deux réels, on a déjà démontré que $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$.

Donc pour tous réels a et b on a : $e^{a+b} = e^a e^b$

- En prenant $a = -b$, on obtient en particulier :

$$e^{-b+b} = e^{-b} e^b \Leftrightarrow e^0 = e^{-b} e^b \Leftrightarrow 1 = e^{-b} e^b$$

On en déduit que pour tout $b \in \mathbb{R}$, $e^b \neq 0$ et $e^{-b} = \frac{1}{e^b}$

- Pour tous réels a et b , on peut écrire : $e^{a-b} = e^{a+(-b)} = e^a e^{-b} = e^a \cdot \frac{1}{e^b} = \frac{e^a}{e^b}$

III. Introduction de la fonction logarithme népérien

1. Définition.

On définit sur $]0; +\infty[$ la fonction logarithme népérien comme la fonction qui prend la valeur 0 en 1 et dont la fonction dérivée est la fonction inverse.

On note cette fonction **ln**

$$\begin{aligned} \ln :]0; +\infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln x \end{aligned}$$

Exemples : pour $x > 0$, $g(x) = \ln x$ $g'(x) = \frac{1}{x}$

pour $x > 0$, $f(x) = \ln(5x)$ $f'(x) = \frac{1}{x}$

pour $x > -\frac{5}{2}$, $h(x) = \ln(2x+5)$ $h'(x) = \frac{2}{2x+5}$

2. Théorème et propriétés.

théorème : Relation fonctionnelle.

Les fonctions f dérivables sur $]0; +\infty[$ et qui vérifient, pour tous réels x et y , $f(xy) = f(x) + f(y)$, sont les fonctions de la forme $k \times \ln$ où k est une constante réelle.

preuve : voir activité page 117

Propriétés :

Soit a et b deux réels strictement positifs et n un entier relatif.

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$$\ln \frac{1}{b} = -\ln b$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\ln a^n = n \ln a$$

$$\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$$

3. Logarithme décimal : log

On définit la fonction \log par : $\log :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{\ln x}{\ln 10}$$

La fonction \log vérifie l'équation fonctionnelle $f(xy) = f(x) + f(y)$

$$\log 10 = 1$$

Exemples d'utilisation de la table des logarithmes page 117.

$$\log 66 = \log(6 \times 11) = \log 6 + \log 11 \approx 0,77815 + 1,04139 \approx 1,81954$$

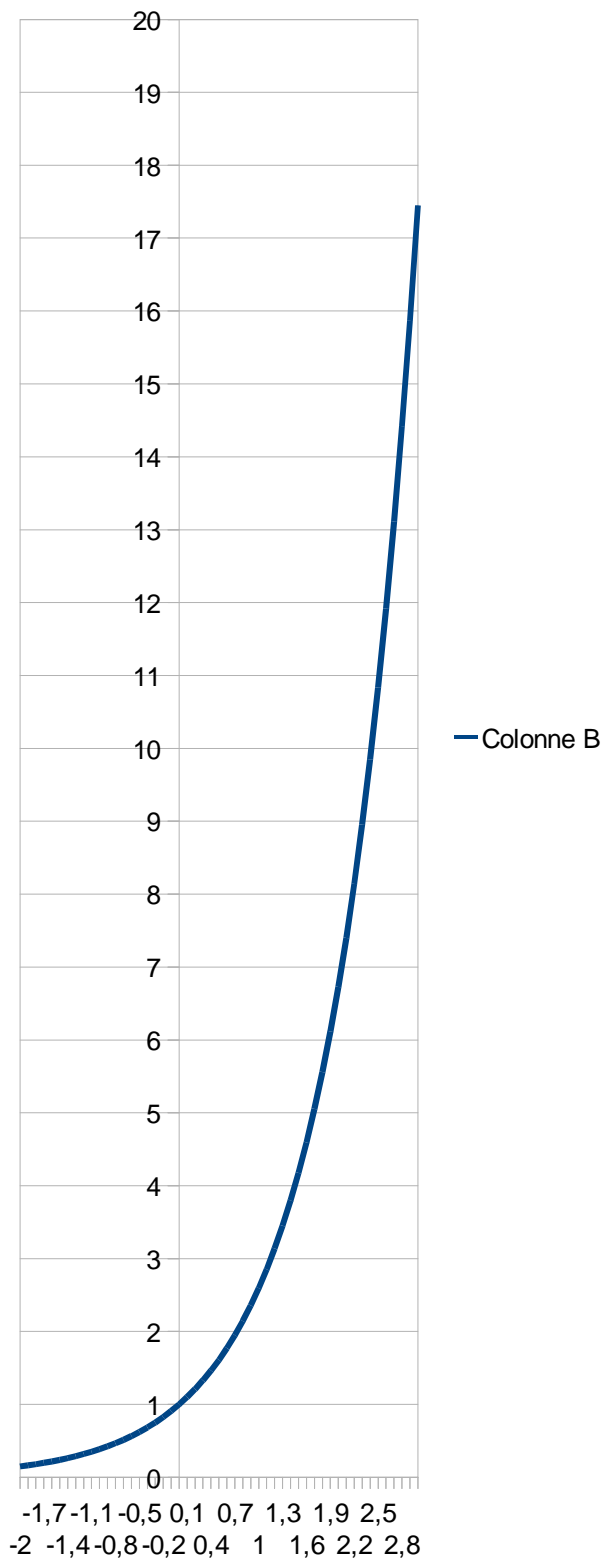
$$\log 0,66 = \log 66 \times 10^{-2} = \log 66 + \log 10^{-2} = 1,81954 - 2 = -0,18046$$

VII Méthode d'Euler

La méthode d'Euler, utilisée lors du TD sur la fonction exponentielle à permis de donner l'allure de la courbe représentative de la fonction exp. (voir TD)

x	approximation de exp(x)
-2	0,148643628
-1,9	0,1635079908
-1,8	0,1798587899
-1,7	0,1978446689
-1,6	0,2176291358
-1,5	0,2393920494
-1,4	0,2633312543
-1,3	0,2896643797
-1,2	0,3186308177
-1,1	0,3504938995
-1	0,3855432894
-0,9	0,4240976184
-0,8	0,4665073802
-0,7	0,5131581182
-0,6	0,5644739301
-0,5	0,6209213231
-0,4	0,6830134554
-0,3	0,7513148009
-0,2	0,826446281
-0,1	0,9090909091
0	1
0,1	1,1

0,2	1,21
0,3	1,331
0,4	1,4641
0,5	1,61051
0,6	1,771561
0,7	1,9487171
0,8	2,14358881
0,9	2,357947691
1	2,5937424601
1,1	2,8531167061
1,2	3,1384283767
1,3	3,4522712144
1,4	3,7974983358
1,5	4,1772481694
1,6	4,5949729864
1,7	5,054470285
1,8	5,5599173135
1,9	6,1159090448
2	6,7274999493
2,1	7,4002499443
2,2	8,1402749387
2,3	8,9543024326
2,4	9,8497326758
2,5	10,8347059434
2,6	11,9181765377
2,7	13,1099941915
2,8	14,4209936107
2,9	15,8630929717
3	17,4494022689



En utilisant l'approxiamtion affine au voisinage de a (strictement positif) pour la fonction ln, on obtient :

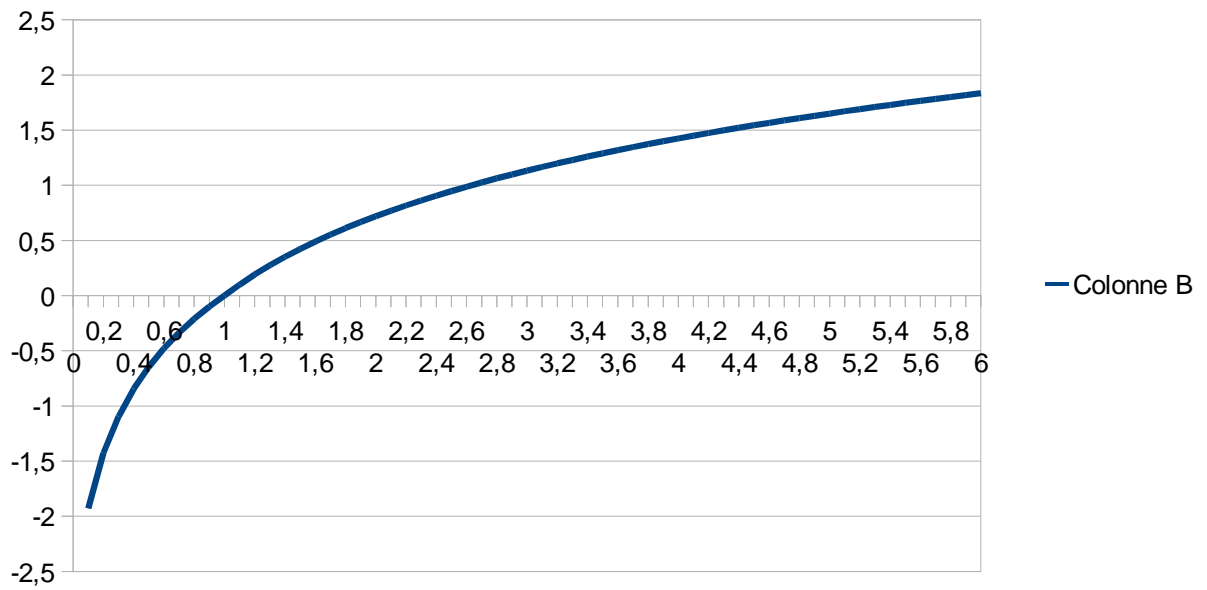
Pour h proche de 0 et a strictement positif : $f(a + h) \approx f(a) + \frac{h}{a}$

Avec le tableur et en partant de a=1 avec h=0.1

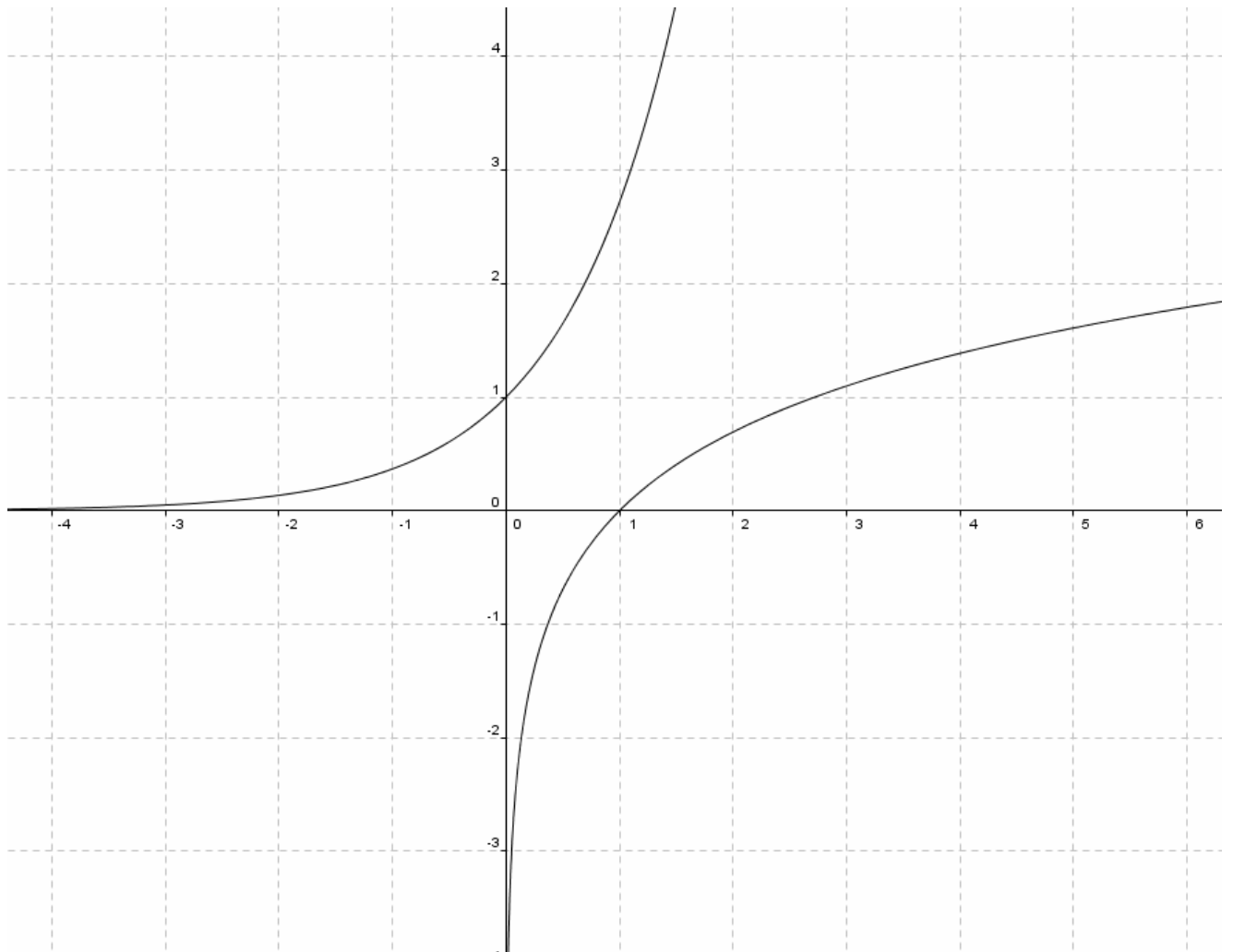
x	approximation de ln x
0	

0,1	-1,928968254
0,2	-1,428968254
0,3	-1,0956349206
0,4	-0,8456349206
0,5	-0,6456349206
0,6	-0,478968254
0,7	-0,3361111111
0,8	-0,2111111111
0,9	-0,1
1	0
1,1	0,1
1,2	0,1909090909
1,3	0,2742424242
1,4	0,3511655012
1,5	0,4225940726
1,6	0,4892607393
1,7	0,5517607393
1,8	0,6105842687
1,9	0,6661398242
2	0,7187714032
2,1	0,7687714032
2,2	0,8163904508
2,3	0,8618449962
2,4	0,9053232571
2,5	0,9469899238
2,6	0,9869899238
2,7	1,0254514622
2,8	1,0624884993
2,9	1,098202785
3	1,1326855436
3,1	1,166018877
3,2	1,1982769415
3,3	1,2295269415
3,4	1,2598299718
3,5	1,2892417365
3,6	1,317813165
3,7	1,3455909428
3,8	1,3726179699
3,9	1,3989337593
4	1,424574785
4,1	1,449574785
4,2	1,4739650289
4,3	1,4977745527
4,4	1,5210303666
4,5	1,5437576394
4,6	1,5659798616
4,7	1,587718992
4,8	1,6089955878
4,9	1,6298289211

5	1,6502370844
5,1	1,6702370844
5,2	1,6898449275
5,3	1,7090756967
5,4	1,7279436213
5,5	1,7464621398
5,6	1,764643958
5,7	1,7825011008
5,8	1,8000449605
5,9	1,8172863398
6	1,8342354923



Si maintenant on place ces deux courbes dans un même repère orthonormé, on obtient :



Tracer la droite d'équation $y = x$. Que constate-t-on ?

Pour a quelconque, placer $A(a; e^a)$ puis $B(e^a; a)$. Compléter : $\ln e^a = \dots$

Pour $b > 0$, placer $C(b; \ln b)$ puis $D(\ln b; b)$. Compléter : $e^{\ln b} = \dots$

Remarque : On dit que **les fonctions exponentielle et logarithme népérien** sont réciproques l'une de l'autre. Cela permet de déterminer un nombre dont on connaît le logarithme ou l'exponentielle. Par exemple :

Si a vérifie $\ln a = 5,7$ alors $a = e^{5,7} \approx 298,87$

Si m vérifie $e^m = 5,7$ alors $m = \ln 5,7 \approx 1,74$

IV. Le raisonnement par récurrence

1) Définition :

Soit $P(n)$ une propriété dépendant d'un nombre entier naturel n . On dit que la propriété $P(n)$ est héréditaire lorsque : pour tout entier n si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est aussi vraie.

2) Exemple :

Soit $P(n)$ la propriété suivante : $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Montrer que $P(n)$ est une propriété héréditaire.

3) Axiome : (principe de récurrence)

Soit $P(n)$ une proposition dépendant d'un entier n et n_0 un entier fixé.

Si $P(n_0)$ est vraie (**initialisation**) et si $P(n)$ est une propriété **héréditaire**

alors $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Remarque :

Un axiome des mathématiques est un énoncé qui est posé à priori et qui sera une base d'une théorie mathématiques : il ne se démontre pas.

En géométrie, un axiome célèbre est l'axiome d'Euclide : « Par un point donné, il passe une unique droite parallèle à une droite donnée. »

59 Propriété 5 bis :

Pour tout réel x et pour tout entier n : $e^{nx} = (e^x)^n$

Démonstration :

A faire en exercice, à l'aide un raisonnement par récurrence.
