

Correction du Devoir maison n°2**Exercice 1 :**

1°) Déterminons le module et un argument du nombre complexe $Z = 8\sqrt{2}(1+i)$:

- $|Z| = \sqrt{(8\sqrt{2})^2 + (8\sqrt{2})^2} = 16$

- On note $\theta = \arg(Z)$; on cherche $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{\operatorname{Re}(Z)}{|Z|} = \frac{8\sqrt{2}}{16} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{\operatorname{Im}(Z)}{|Z|} = \frac{8\sqrt{2}}{16} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

On peut donc choisir $\theta = \frac{\pi}{4}$

Conclusion :

$$|Z| = 16, \quad \arg(Z) = \frac{\pi}{4}$$

2°) On considère le nombre complexe z_0 tel que $z_0 = 2\sqrt{2+\sqrt{2}} + 2i\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

Vérifions que $z_0^2 = Z$:

$$z_0^2 = \left(2\sqrt{2+\sqrt{2}} + 2i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2 = 4(2+\sqrt{2}) + 8i\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} - 4(2-\sqrt{2})$$

Donc :

$$z_0^2 = 4(2+\sqrt{2}-2+\sqrt{2}) + 8i\sqrt{2^2 - \sqrt{2}^2} = 8\sqrt{2} + 8i\sqrt{2} = 8\sqrt{2}(1+i)$$

Conclusion :

$$z_0^2 = Z$$

3°) a) Le module et un argument de z_0 :

Comme $z_0^2 = Z$, on a :

- $|z_0^2| = |Z|$ donc $|z_0|^2 = |Z| = 16$ et comme $|z_0| \geq 0$, on en déduit que $|z_0| = \sqrt{16} = 4$

- $\arg(z_0^2) = 2\arg(z_0) = \arg(Z) = \frac{\pi}{4}$, donc $\arg(z_0) = \frac{\pi}{8}$

Conclusion :

$$|z_0| = 4 \text{ et } \arg(z_0) = \frac{\pi}{8}$$

b) Les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$:

D'après 3°) a) : $z_0 = 4 \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right)$ et par identification avec $z_0 = 2\sqrt{2+\sqrt{2}} + 2i\sqrt{2-\sqrt{2}}$, on obtient :

$$4 \cos \frac{\pi}{8} = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}, \text{ donc } \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \text{ et } 4 \sin \frac{\pi}{8} = 2\sqrt{2-\sqrt{2}}, \text{ donc } \sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

(Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire)

Conclusion :

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

Exercice 2 :

On considère les nombres complexes z_1 et z_2 définis par $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $z_2 = 1 - i$

1°) Calcul du module et d'un argument de z_1 et z_2 :

▪ Pour z_1 :

$$\bullet |z_1| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

$$\bullet \text{ On note } \theta_1 = \arg(z_1) ; \text{ on cherche } \theta_1 \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{\operatorname{Re}(z_1)}{|z_1|} = -\frac{1}{2} \\ \sin \theta_1 = \frac{\operatorname{Im}(z_1)}{|z_1|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

On peut donc choisir $\theta_1 = \frac{2\pi}{3}$

▪ Pour z_2 :

$$\bullet |z_2| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\bullet \text{ On note } \theta_2 = \arg(z_2) ; \text{ on cherche } \theta_2 \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} \cos \theta_2 = \frac{\operatorname{Re}(z_2)}{|z_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta_2 = \frac{\operatorname{Im}(z_2)}{|z_2|} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

On peut donc choisir $\theta_2 = \frac{7\pi}{4}$

Conclusion :

$$|z_1| = 1, \arg(z_1) = \frac{2\pi}{3} ; |z_2| = \sqrt{2}, \arg(z_2) = \frac{7\pi}{4}$$

2°) On pose $Z = \frac{z_1^2}{z_2}$. Déterminons une forme trigonométrique et la forme algébrique de Z :

• Forme trigonométrique de Z :

On a ▪ $|Z| = \frac{|z_1^2|}{|z_2|} = \frac{|z_1|^2}{|z_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

▪ $\arg(Z) = \arg\left(\frac{z_1^2}{z_2}\right) = \arg(z_1^2) - \arg(z_2) = 2\arg(z_1) - \arg(z_2) = 2 \times \frac{2\pi}{3} - \frac{7\pi}{4} = -\frac{5\pi}{12}$

Donc :

$$Z = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right) \right)$$

• Forme algébrique de Z :

$$Z = \frac{z_1^2}{z_2} = \frac{\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2}{1-i} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{2\sqrt{3}}{4}i - \frac{3}{4}}{1-i} = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}{1-i} = \frac{\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

Donc :

$$Z = \frac{-1 + \sqrt{3}}{4} - i \frac{1 + \sqrt{3}}{4}$$

3°) Valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$:

En identifiant $Z = \frac{-1 + \sqrt{3}}{4} - i \frac{1 + \sqrt{3}}{4}$ et $Z = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right) \right)$, on obtient :

$$\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

Or, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$; donc :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$