Correction du Devoir sur Table n°1

Exercice 1 : ***5 points***

Partie A : Restitution Organisée des Connaissances :

Prérequis : La fonction exponentielle est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R} : \mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b \quad (*)$$

1°) **a)** Démontrons que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x = \left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right)^2$:

En posant $a = b = \dfrac{x}{2}$ dans (*), on obtient : $\forall x \in \mathbb{R} :\ \mathrm{e}^{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}} = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \times \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$

Ainsi : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} :\ \mathrm{e}^x = \left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right)^2}$

b) Démontrons que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \neq 0$:

$\forall x \in \mathbb{R} : x + (-x) = 0$; En posant $a = x$ et $b = -x$ dans (*), on obtient : $\mathrm{e}^{x+(-x)} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x}$.

Par suite : $\mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x}$, donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x} = 1$ car $\mathrm{e}^0 = 1$.

S'il existait $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{e}^x = 0$, on aurait $\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x} = 0$, ce qui est impossible car $0 \neq 1$.

Donc : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \neq 0}$

c) Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x > 0$:

D'après a) : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x = \left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right)^2$ et d'après b) $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \neq 0$.

Donc $\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right)^2 > 0$, car le carré d'un nombre réel non nul est strictement positif.

D'où : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x > 0}$

2°) Démontrons que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R} :\ \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y} = \mathrm{e}^{x-y}$:

D'après **1°) b)** $\forall y \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^y \times \mathrm{e}^{-y} = 1$, donc $\mathrm{e}^{-y} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^y}$.

En posant $a = x$ et $b = -y$, dans (*), on obtient $\mathrm{e}^{x-y} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-y}$, donc $\mathrm{e}^{x-y} = \mathrm{e}^x \times \dfrac{1}{\mathrm{e}^y} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$

D'où : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R} :\ \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y} = \mathrm{e}^{x-y}}$

Partie B :

1°) Montrons que : $\forall x\in \mathbb{R}:\ e^{x+2}\times e^{-x+2}=e^{4}$:

$\forall x\in \mathbb{R}:\ e^{x+2}\times e^{-x+2}=e^{x+2-x+2}=e^{4}$

2°) Démontrons que : $\forall x\in \mathbb{R}:\ \dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}+\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=0$:

$\forall x\in \mathbb{R}:\ \dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}+\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\dfrac{\left(e^{x}-1\right)\left(e^{-x}+1\right)+\left(e^{-x}-1\right)\left(e^{x}+1\right)}{\left(e^{x}+1\right)\left(e^{-x}+1\right)}$

(réduction au même dénominateur)

Ainsi : $\forall x\in \mathbb{R}:\ \dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}+\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\dfrac{e^{x}\times e^{-x}+e^{x}-e^{-x}-1+e^{x}\times e^{-x}+e^{-x}-e^{x}-1}{\left(e^{x}+1\right)\left(e^{-x}+1\right)}$

(il est inutile de développer le dénominateur car le numérateur doit être nul)

Par suite : $\forall x\in \mathbb{R}:\ \dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}+\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\dfrac{1+e^{x}-e^{-x}-1+1+e^{-x}-e^{x}-1}{\left(e^{x}+1\right)\left(e^{-x}+1\right)}=0$ (car $e^{0}=1$)

Conclusion : $\boxed{\forall x\in \mathbb{R}:\ \dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}+\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=0}$

Exercice 2 : ***3 points***

Prérequis : la fonction logarithme népérien ln est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ telle que : $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$ et $\ln 1=0$

1°) Démontrons que : $\forall a>0,\forall x>0:\ln\left(a\times x\right)=\ln a+\ln x$:

Soit $a>0,\forall x>0$ on pose $f(x)=\ln\left(ax\right)-\ln\left(x\right)$

f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall x>0:\ f'(x)=\dfrac{a}{ax}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}=0$

Donc *f* est constante sur $]0;+\infty[$ et comme $f(1)=\ln a-\ln 1=\ln a$, on en déduit que :

$\forall x>0:\ f(x)=\ln a$

Conclusion : $\boxed{\forall a>0,\forall x>0:\ln\left(a\times x\right)=\ln a+\ln x}$

2°) Montrons que : $\forall x>0:\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\ln x$:

$\forall x>0,\ x\times\dfrac{1}{x}=1$. Donc $\ln\left(x\times\dfrac{1}{x}\right)=\ln 1=0.$

Ainsi $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)+\ln x=0,$ donc $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\ln x$

Conclusion : $\boxed{\forall x>0:\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\ln x}$

Exercice 3 : *3 points*

Pour chaque affirmation proposée, cocher la case V (vraie) ou F (faux). On ne demande pas de justification :

		V	F
Affirmation 1	Pour tous les réels a et b : $\left(e^a\right)^b = e^{a^b}$		☑
Affirmation 2	Pour tous les réels a et b : $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$	☑	
Affirmation 3	Pour tous les réels a et b : $e^a + e^b = e^{ab}$		☑
Affirmation 4	Pour tout réel x : $\left(e^{1-x}\right)' = e^{1-x}$		☑

Exercice 4 : *2 points*

Soit $z = 3 - \frac{5}{2}\mathrm{i}$.

1°) La partie imaginaire de z est $\frac{5}{2}\mathrm{i}$: Faux, la partie imaginaire de z est $-\frac{5}{2}$.

2°) Le conjugué de z est $\bar{z} = 3 + \frac{5}{2}\mathrm{i}$: Vrai (même partie réelle et partie imaginaire opposée)

3°) z est représenté dans le plan par le point $M\left(3;-2,5\right)$: Vrai car $z = 3 - \frac{5}{2}\mathrm{i} = 3 - 2,5\mathrm{i}$

4°) $z = 4 + \mathrm{i}\left(\mathrm{i} - \frac{5}{2}\right)$: Vrai car $4 + \mathrm{i}\left(\mathrm{i} - \frac{5}{2}\right) = 4 + \mathrm{i}^2 - \frac{5}{2}\mathrm{i} = 4 - 1 - \frac{5}{2}\mathrm{i} = 3 - \frac{5}{2}\mathrm{i} = z$.

Exercice 5 : *3 points*

Prérequis : $\forall z \notin \mathbb{C}^*, \forall z' \in \mathbb{C}^* : \arg\left(z \times z'\right) = \arg\left(z\right) + \arg(z')$

<u>Démontrons par récurrence que</u> : $\forall n \geq 1, \arg\left(z^n\right) = n\arg\left(z\right)$

• <u>Initialisation :</u> Pour $n = 1$: $\arg\left(z^n\right) = \arg\left(z\right)$ et $n\arg\left(z\right) = \arg\left(z\right)$, donc :

$\arg\left(z^n\right) = n\arg\left(z\right)$ est vraie pour $n = 1$.

• <u>Hérédité :</u> Soit $n \geq 1$ tel que $\arg\left(z^n\right) = n\arg\left(z\right)$.

Démontrons que $\arg\left(z^{n+1}\right) = \left(n+1\right)\arg\left(z\right)$:

On a : $\arg\left(z^{n+1}\right) = \arg\left(z \times z^n\right) = \arg\left(z\right) + \arg\left(z^n\right) = \arg\left(z\right) + n\arg\left(z\right) = \left(n+1\right)\arg\left(z\right)$

Donc : $\forall n \geq 1$, si $\arg\left(z^n\right) = n\arg\left(z\right)$ alors $\arg\left(z^{n+1}\right) = \left(n+1\right)\arg\left(z\right)$

• <u>Conclusion :</u> D'après le principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \geq 1, \arg\left(z^n\right) = n\arg\left(z\right)}$$

Partie B : Application :

$z=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1°) <u>Déterminons le module et un argument de z :</u>

- $|z|=\left|\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$

- Soit $\theta=\arg(z)$. On cherche $\theta\in\mathbb{R}$ tel que $\begin{cases}\cos\theta=\frac{1}{2}\\ \sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$: $\theta=-\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

<u>Conclusion :</u>

$$\boxed{|z|=1 \text{ et } \arg(z)=-\frac{\pi}{3}\ [2\pi]}$$

2°) <u>Déterminons un argument de</u> z^{2011} :

On $\arg\left(z^{2011}\right)=2011\arg(z)=2011\times\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\left(670+\frac{1}{3}\right)\pi=-335\times2\pi-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

3°) Forme algébrique de z^{2011} :

$\left|z^{2011}\right|=|z|^{2011}=1$, donc : $\boxed{z^{2011}=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$

Exercice 6 : ***4 points***

I. Première stratégie :

1. (B, B, B), (B, B, C), (B, C, B), (B, C, C), (C, B, B), (C, B, C), (C, C, B), (C, C, C) soit huit triplets
2. $p(\text{B, B, B}) = \frac{1}{8} = 0,125$.
3. On considère les réponses où il n'y a qu'une seule fois la lettre C : il y a trois triplets, donc la probabilité est égale à $\frac{3}{8} = 0,375$.
4. **a.** Avec trois bonnes réponses : X= 6 ;
   Avec deux bonnes réponses : X= 3 ;
   Avec une bonne réponse : X= 0 ;
   Avec zéro bonne réponse : X= −3 ramenée à 0 ;

   b. Il reste à calculer la probabilité d'avoir une seule bonne réponse ou zéro ; il y a trois triplets contenant une seule fois B ou zéro B. Donc $p(\text{X} = 0 = \frac{3}{8} = 0,375$.
   On a donc par complément à 1 : $p(\text{X} = -3) = 1-(0,125+0,375) = 1-0,5 = 0,5$.
   On a donc le tableau suivant :

x_i	6	3	0
$p(\text{X} = x_i)$	0,125	0,375	0,5

   c. $\text{E(X)} = 6 \times 0,125 + 3 \times 0,375 + 0 \times 0,5 = 1,875$.
   Conclusion : un candidat qui répond à toutes les questions au hasard aura un peu moins de 2 points sur un maximum de 6.

II. Deuxième stratégie :

1. On trouve les quatre triplets (A, B, B), (A, B, C), (A, C, B), (A, C, C)
2. **a.** Les valeurs de Y sont respectivement : 4, 2, 2, 0

   b. On obtient facilement le tableau :

y_i	4	1	0
$p(\text{Y} = y_i)$	0,25	0,5	0,25

   c. $\text{E(Y)} = 4 \times 0,25 + 1 \times 0,5 = 1,5$.

III. Comparaison des stratégies :
La première stratégie est meilleure que la seconde.