

**Chapitre GP2 : Probabilités****RAPPELS****Points du programme visés :**

Contenus	Modalités de mise en oeuvre	Commentaires
<p><b>Probabilité.</b> Définition d'une loi de probabilité sur un ensemble fini. Espérance, variance, écart-type d'une loi de probabilité. Probabilité d'un événement, de la réunion et de l'intersection d'évènements. Cas de l'équiprobabilité. Variable aléatoire, loi d'une V.A., espérance, variance, écart-type.</p> <p>Modélisation d'expériences aléatoires de référence (lancers d'un ou plusieurs dés ou pièce discernables ou non, tirage au hasard dans une urne, choix de chiffres au hasard, etc.)</p>	<p>Le lien entre loi de probabilité et distribution de fréquences sera éclairé par un énoncé vulgarisé de la loi des grands nombres. On expliquera ainsi la convergence des moyennes vers l'espérance et des variances empiriques vers les variances théoriques ; on illustrera ceci par des simulations dans des cas simples. On pourra aussi illustrer cette loi avec des diagramme en boites obtenus en simulant par exemple 100 sondages de taille n, pour n=10 ; 100 ; 1000.</p> <p>On simulera des lois de probabilités simples obtenues comme image d'une loi équirépartie par une variable aléatoire (sondage, somme des faces de deux dés, etc.)</p>	<p>On pourra par exemple choisir comme énoncé vulgarisé de la loi des grands nombres la proposition suivante :</p> <p>Pour une expérience donnée, dans le modèle défini par une loi de probabilité P, les distributions des fréquences calculées sur des séries de tailles n se rapprochent de P quand n devient grand.</p> <p>On indiquera que simuler une expérience consiste à simuler un modèle de cette expérience. La modélisation avec des lois ne découlant pas d'une loi équirépartie est hors programme.</p> <p>On évitera le calcul systématique et sans but précis de l'espérance et de la variance de lois de probabilité.</p>

## I. Vocabulaire

### 1) Expérience aléatoire :

#### a) Définition :

*On appelle expérience aléatoire toute expérience dont-on connaît les conditions de réalisations et toutes les issues possibles mais dont-on ne connaît pas celle qui va se produire lorsqu'on réalise l'expérience.*

#### b) Exemples :

- Lancé d'une pièce de monnaie (équilibrée ou non)
- Lancé d'un dé à 6 faces.
- Choix d'une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

### 2) Univers d'une expérience aléatoire :

#### a) Définition :

*On appelle univers d'une expérience aléatoire l'ensemble de toutes les issues possibles (appelées aussi éventualités) de cette expérience.  
On le note souvent  $\Omega$ .*

#### b) Exemples :

- Lancé d'une pièce de monnaie (équilibrée ou non) :

L'univers est constitué de 2 issues : Pile (P) et Face (F) :  $\Omega = \{P; F\}$

- Lancé d'un dé à 6 faces :

L'univers est constitué de 6 éventualités :  $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$

- Choix d'une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes :

L'univers est constitué de 32 éventualités : 8 cartes de pique, 8 carte de trèfle, 6 carte de cœur, 8 cartes de carreaux.

#### Remarque :

En 1<sup>ère</sup> S, on étudie des expériences aléatoires dont l'univers est un ensemble ayant un nombre fini d'éléments. En terminale S, l'univers pourra être un ensemble ayant un nombre infini d'éléments.

### 3) Evènement :

### a) Définition :

*Soit une expérience aléatoire d'univers  $\Omega$ . On appelle événement toute partie de  $\Omega$ . Une éventualité  $\omega$  **appartient** à l'univers  $\Omega$  ( on note  $\omega \in \Omega$  ). Un événement  $A$  est **inclus** dans l'univers  $\Omega$  (on note  $A \subset \Omega$  )*

### b) Exemples :

- Lancé d'une pièce de monnaie (équilibrée ou non) :

L'univers est constitué de 2 issues : pile (P) et face (F) :  $\Omega = \{P; F\}$

P = « Obtenir pile » est un événement.

- Lancé d'un dé à 6 faces :

L'univers est constitué de 6 éventualités :  $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$

A = « Obtenir 3 », B = « Obtenir un nombre pair » sont des événements.

- Choix d'une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes :

L'univers est constitué de 32 éventualités : 8 cartes de pique, 8 carte de trèfle, 6 carte de cœur, 8 cartes de carreaux.

C = « Obtenir la dame de cœur », D = « Obtenir une figure », E = « Obtenir une carte de pique » sont des événements.

### c) Evènement élémentaire :

*Un évènement élémentaire est un évènement constitué d'une seule éventualité de l'univers.*

### Exemple :

- Lancé d'un dé à 6 faces :

L'univers est constitué de 6 éventualités :  $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$

A = « Obtenir 3 » est un évènement élémentaire alors que B = « Obtenir un nombre pair » n'est pas élémentaires (plusieurs éventualités peuvent réaliser B)

### d) Evènement impossible :

*Un évènement est dit impossible lorsque aucune éventualité de l'univers ne permet de le réaliser. On le note  $\emptyset$ .*

### Exemple :

- Lancé d'un dé à 6 faces :

L'univers est constitué de 6 éventualités :  $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$

A = « Obtenir 7 » est un évènement impossible.

### e) Evènement certain :

L'univers  $\Omega$  d'une expérience aléatoire est l'évènement certain

Exemple :

- Lancé d'un dé à 6 faces :

L'univers est constitué de 6 éventualités :  $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$

$A = \ll \text{Obtenir 1 ou 2 ou 3 ou 4 ou 5 ou 6} \gg$  est l'évènement certain.

f) Réunion de deux évènements :

*Soit une expérience aléatoire d'univers  $\Omega$  et  $A$  et  $B$  deux évènements. On appelle réunion des évènements  $A$  et  $B$ , l'ensemble des éventualités qui réalisent  $A$  ou  $B$ . On le note  $A \cup B$*

Exemple :

- Choix d'une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes :

L'univers est constitué de 32 éventualités : 8 cartes de pique, 8 carte de trèfle, 6 carte de cœur, 8 cartes de carreaux.

$C = \ll \text{Obtenir la dame de cœur} \gg$ ,  $D = \ll \text{Obtenir un as} \gg$

$C \cup D = \ll \text{Obtenir un as ou la dame de cœur} \gg$  : il est constitué de 5 éventualités.

g) Intersection de deux évènements :

*Soit une expérience aléatoire d'univers  $\Omega$  et  $A$  et  $B$  deux évènements. On appelle intersection des évènements  $A$  et  $B$ , l'ensemble des éventualités qui réalisent  $A$  et  $B$  à la fois. On le note  $A \cap B$*

Exemple :

- Choix d'une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes :

L'univers est constitué de 32 éventualités : 8 cartes de pique, 8 carte de trèfle, 6 carte de cœur, 8 cartes de carreaux.

$C = \ll \text{Obtenir une dame} \gg$ ,  $D = \ll \text{Obtenir une carte de trèfle} \gg$

$C \cap D = \ll \text{Obtenir la dame de trèfle} \gg$  : il est constitué de 1 éventualité.

Remarques :

*Si  $A \cap B = \emptyset$ , on dit que  $A$  et  $B$  sont disjoints ou incompatibles.*

h) Evènement contraire :

Soit une expérience aléatoire d'univers  $\Omega$  et  $A$  un évènement. On appelle évènement contraire de  $A$  (ou évènement complémentaire) de  $A$ , l'ensemble des éventualités de  $\Omega$  qui ne permettent pas la réalisation de  $A$ . On le note  $\bar{A}$ .

Remarque :  $\bar{\bar{A}} = \Omega \setminus A$  et  $A \cup \bar{A} = \Omega$

Exemple :

- Lancé d'une pièce de monnaie (équilibrée ou non) :

L'univers est constitué de 2 issues : Pile (P) et Face (F) :  $\Omega = \{P; F\}$

$$\bar{P} = F$$

## II. Loi de probabilité

### 1) Définition :

On note  $\Omega = \{ \omega_1, \omega_2 \dots \omega_n \}$  l'ensemble des éventualités d'une expérience aléatoire. Définir une loi de probabilité sur  $\Omega$ , c'est associer à chaque résultat  $\omega_i$  un nombre  $p_i$  (appelé probabilité de l'issue  $\omega_i$ ) positif ou nul de telle façon que :

- Pour toute éventualité  $\omega_i$  on a :  $0 \leq p_i \leq 1$

- $$\sum_{i=1}^n p_i = p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

**Modéliser** une expérience aléatoire, c'est associer à cette expérience une loi de probabilité sur l'ensemble  $\Omega$  des résultats possibles.

Les conditions de l'expérience conduisent le plus souvent au choix du modèle.

### 2) Exemples :

- Lancé d'une pièce de monnaie (équilibrée) :

L'univers est constitué de 2 issues : Pile (P) et Face (F) :  $\Omega = \{P; F\}$

Activité :

Chaque élève simule avec sa calculatrice (  $\text{int}(\text{Rand} \times 2)$  ) 10 lancers d'une pièce équilibrée avec la convention P = 0 et F = 1 et communique la fréquence de P obtenue.

En réunissant les 35 échantillons de taille 10, on obtient un échantillon de taille 350 dont la fréquence de P se rapproche de  $\frac{1}{2}$  (fréquence théorique)

## Loi de probabilité:

On la présente souvent sous la forme d'un tableau :

Face	P	F
Probabilité $p_i$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

### • Lancé d'un dé à 6 faces :

L'univers est constitué de 6 éventualités :  $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$

### Activité :

Chaque élève simule avec sa calculatrice (  $\text{int}(\text{Rand} \times 6) + 1$  ) 10 lancers d'un dé à 6 faces non pipé et communique la fréquence de 3 obtenue.

En réunissant les 35 échantillons de taille 10, on obtient un échantillon de taille 350 dont la fréquence de 3 se rapproche de  $\frac{1}{6}$  (fréquence théorique)

## Loi de probabilité:

Face	1	2	3	4	5	6
Probabilité $p_i$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Lorsque qu'on répète une expérience aléatoire, on appelle fréquence d'apparition d'une éventualité donnée, noté  $w_i$  le nombre :

$$f_i = \frac{\text{nombre de fois où l'éventualité } \omega_i \text{ apparaît}}{\text{nombre de fois où l'expérience est répétée}}$$

On constate que si l'on répète un grand nombre de fois l'expérience donnée, les différentes fréquences d'apparition ont tendance à se stabiliser, ce qui n'est parfois que théorique car répéter une expérience aléatoire dans les mêmes conditions n'est pas toujours envisageable.

Ce constat est un résultat mathématique appelé « loi des grands nombres » ; Il se démontre, mais la démonstration est largement hors de vos compétences :

*Pour une expérience donnée, dans le modèle défini par une loi de probabilité, les distributions des fréquences calculées sur des séries de taille  $n$  se rapprochent de la loi de probabilité quand  $n$  devient grand. (l'énoncé rigoureux est plus compliqué)*

### Remarques:

Dans certains cas, on utilise ce résultat pour valider ou rejeter un modèle choisi à priori.

Dans d'autres cas, lorsqu'on ne connaît pas de loi de probabilité relativement à une expérience aléatoire, on peut ainsi en introduire une à partir des fréquences déterminées lors d'un grand nombre d'expériences.

## 2) Cas particulier : l'équiprobabilité

### a) Définition :

Lorsque tous les événements élémentaires d'un univers ont la même probabilité, on dit qu'il y a **équiprobabilité**.

Dans ce cas, si l'univers  $\Omega$  est composé de  $n$  éventualités  $w_i$ , on a :

$$p_i = P(\{w_i\}) = \frac{1}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{n};$$

On dit que la loi est équirépartie.

### b) Situation d'équiprobabilité :

Les expressions comme « hasard », « non pipé », « équilibré », « indiscernables au toucher » indiquent que pour les expériences réalisées, le modèle associé est l'équiprobabilité.

## 3) Paramètres d'une loi de probabilité :

On considère une expérience aléatoire d'univers  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ , où les  $\omega_i$  sont des nombres réels.

Lorsqu'on réalise une expérience aléatoire un grand nombre de fois et dans les mêmes conditions, la moyenne des moyennes de chaque série tend vers une moyenne théorique appelée **espérance mathématique** de la loi de probabilité.

### a) Espérance mathématique :

#### Définition :

**L'espérance mathématique** de la loi de probabilité est le nombre réel  $E$  défini par :

$$E = \sum_{i=1}^n p_i \omega_i$$

#### Exemple:

#### Loi de probabilité:

Face	1	2	3	4	5	6
Probabilité $p_i$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E = \sum_{i=1}^6 \omega_i p_i = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{1}{6} \times \frac{6 \times 7}{2} = \frac{7}{2}$$

#### Interprétation :

Le nombre  $E$  représente la valeur moyenne obtenue par expérience lorsqu'on répète un grand nombre de fois, de manière indépendante, l'expérience aléatoire dans les mêmes conditions .

Dans le cas précédent : Lorsqu'on lance un grand nombre de fois un dé et que l'on fait la moyenne des nombres obtenus, on trouve 3,5.

### Propriété :

*L'espérance mathématique est linéaire (autrement dit lorsqu'on multiplie les  $\omega_i$  par un réel  $a$  non nul et/ou qu'on leur ajoute un réel  $b$  alors la nouvelle espérance est  $aE + b$*

(Ce résultat a été démontré en classe de 2<sup>nde</sup>)

### b) Variance et écart-type :

#### Définition :

**La variance** de la loi de probabilité est le nombre  $V$  défini par :

$$V = \sum_{i=1}^n p_i (\omega_i - E)^2 = \left( \sum_{i=1}^n p_i \omega_i^2 \right) - E^2$$

**L'écart type** de la loi de probabilité est le nombre  $\sigma$  défini par :  $\sigma = \sqrt{V}$

#### Exemple:

#### Loi de probabilité:

Face	1	2	3	4	5	6
Probabilité $p_i$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Calculer  $V$  et  $\sigma$ .

#### Interprétation :

Plus  $\sigma$  est petit, plus les éventualités sont regroupées autour de  $E$ .

## 1) Propriétés :

Soit  $E$  une expérience aléatoire d'univers  $\Omega$ .

Soient  $A$  et  $B$  deux événements de  $\Omega$ , alors :

- La probabilité de l'événement certain est 1 :  $P(\Omega) = 1$
- La probabilité de l'événement impossible est 0 :  $P(\emptyset) = 0$
- Si  $A \subset B$ , alors  $P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Si  $A$  et  $B$  sont incompatibles :  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

## 2) Cas particulier : équiprobabilité :

Lorsque tous les événements élémentaires d'un univers ont la même probabilité, on dit qu'il y a **équiprobabilité**.

On a alors, pour tout événement  $A$  :  $P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$

...

### Remarque :

Les expressions suivantes « dé parfait ou équilibré », « boule tirée de l'urne au hasard », « boules indiscernables » ... indiquent que pour les expériences réalisées, le modèle associé est l'équiprobabilité.

### Exemple :

On lance un dé cubique non truqué : chacune des faces à la même chance d'être obtenue. Il s'agit d'une situation d'équiprobabilité.

Dans ce cas, il est donc aisé de définir la loi de probabilité :

face	1	2	3	4	5	6
probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

On présente souvent les résultats dans un tableau

La probabilité de l'événement  $A$  : « obtenir un nombre pair » est :

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

### 1) Définition :

Soit  $\Omega$  l'ensemble des résultats d'une expérience aléatoire.

- On appelle **variable aléatoire** toute fonction  $X$  de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$  qui, à tout élément de  $\Omega$ , fait correspondre un nombre réel  $x$ .
- L'événement de  $\Omega$ , noté  $\{ X = x \}$ , est l'ensemble des éléments de  $\Omega$  qui ont pour image  $x$  par  $X$ .

L'ensemble image de  $\Omega$  par  $X$  est l'ensemble de toutes les images des éléments de  $\Omega$  par  $X$ . On le note souvent  $\Omega'$  ou  $X(\Omega)$ .

### Remarques :

Une variable aléatoire n'est pas un nombre, mais une fonction. Les valeurs d'une variable aléatoire sont toujours des nombres. En général, une variable aléatoire est notée  $X, Y, Z, \dots$

### 2) Exemple:

On lance un dé cubique non pipé. On peut définir une variable aléatoire  $X$  de la façon suivante :

- $X = 0$  si le nombre est pair
- $X = 1$  si le nombre est impair

L'ensemble image de  $\Omega$  par  $X$  est  $\Omega' = \{ 0 ; 1 \}$

### 3) Loi de probabilité d'une variable aléatoire :

Soit  $\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \}$  un ensemble sur lequel a été définie une loi de probabilité.

$\Omega' = \{ x_1, x_2, \dots, x_m \}$  est l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire  $X$ .

La loi de probabilité de  $X$  est la fonction définie sur  $\Omega'$ , qui à chaque  $x_i$  fait correspondre le nombre  $p_i' = P(X = x_i)$

On démontre facilement que  $\sum_{i=1}^m p_i' = 1$ .

### 4) Paramètres d'une variable aléatoire :

L'espérance mathématique, la variance et l'écart type de la variable aléatoire  $X$  sont respectivement l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de la loi de probabilité de  $X$  définie sur  $\Omega'$ .

Les notations respectives sont  $E(X)$ ,  $V(X)$  et  $\sigma(X)$ .