

Chapitre GP1 : Les nombres complexes (1)

| | |
|--------------------|------------|
| Durée : 4 semaines | Séquence I |
| Démonstrations : 8 | Tice : 0 |

Objectifs du chapitre :

Introduire de manière historique les nombres complexes et manipuler la forme algébrique d'un nombre complexe et ses formes trigonométriques en rapport avec les connaissances de 1^{ère} S sur les coordonnées cartésiennes et polaires d'un point du plan.

Points du programme visés :

| Contenus | Modalités de mise en oeuvre | Commentaires |
|--|--|--|
| Géométrie plane : nombres complexes | | |
| Le plan complexe : affixe d'un point ; parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe. Conjugué d'un nombre complexe. Somme, produit, quotient de nombres complexes. Module et argument d'un nombre complexe ; module et argument d'un produit, d'un quotient. | Le vocabulaire sera introduit à partir de considérations géométriques. On retrouvera à cette occasion la notion de coordonnées polaires et celle, sous-jacente, d'équation paramétrique d'un cercle (sous la forme $z = z_0 + re^{i\theta}$ ou $x = x_0 + r \cos \theta$, $y = y_0 + r \sin \theta$). | La vision des nombres complexes est d'abord géométrique : calculs sur des points du plan. Les repérages cartésien et polaire introduits en première conduisent naturellement à deux écritures d'un nombre complexe. L'objectif est ensuite de montrer la puissance de ce calcul dans les problèmes de géométrie. |

I. Introduction

Au XVI^e siècle, des mathématiciens italiens de la Renaissance travaillèrent sur la résolution d'équations du 3^{ème} degré.

Ils les ramènent à une autre équation plus simple du 2nd degré dont la résolution est connue depuis le IX^e siècle grâce aux mathématiciens arabes.

C'est au cours de cette recherche que vont apparaître de nouveaux nombres.

1- La méthode de Tartaglia-Cardan :

Résolution de l'équation $x^3 = 6x + 20$ (E_1) :

1°) On pose $x = u + v$.

a) Que devient cette équation ?

b) Quelle valeur suffit-t-il de donner au produit uv pour que (E_1) s'écrive $u^3 + v^3 = 20$?

c) Que vaut, dans ce cas, le produit u^3v^3 ?

2°) On pose $U = u^3$ et $V = v^3$. Former et résoudre dans \mathbb{R} une équation du 2nd degré ayant pour solutions U et V .

3°) Pour tout nombre réel a , le réel $\sqrt[3]{a}$ est le nombre dont le cube est égal à a . On l'appelle **racine cubique de a** .

Montrer que $\sqrt[3]{10 + 2\sqrt{23}} + \sqrt[3]{10 - 2\sqrt{23}}$ est une solution de (E_1) dans \mathbb{R} .

4°) Vérifier, à l'aide d'une calculatrice graphique que (E_1) n'a qu'une seule solution dans \mathbb{R} .

(On représentera la fonction $x \mapsto x^3 - 6x - 20$ dans une fenêtre adaptée faisant apparaître deux extremums relatifs.)

La méthode de CARDAN (1545) conduit cependant, dans certains cas, à un paradoxe que Bombelli va tenter de surmonter en 1572 :

2- L'audace de Bombelli :

Résolution de l'équation $x^3 = 15x + 4$ (E_2) :

1°) On pose $x = u + v$.

a) Que devient cette équation ?

b) Quelle valeur suffit-t-il de donner au produit uv pour que (E_2) s'écrive $u^3 + v^3 = 4$?

c) Que vaut, dans ce cas, le produit u^3v^3 ?

2°) On pose $U = u^3$ et $V = v^3$.

a) Vérifier que, si U et V existent, ils sont solutions de l'équation $(X - 2)^2 + 121 = 0$ (E_3).

Cette équation admet-elle des solutions dans \mathbb{R} ?

b) Montrer, pourtant, que 4 est solution de (E_2) et trouver les 2 autres solutions après avoir factorisé $x^3 - 15x - 4$ par $(x - 4)$.

3°) Devant ce paradoxe, Bombelli décide de faire comme si -121 était le carré d'un nombre imaginaire qui s'écrirait $11\sqrt{-1}$, appelant $\sqrt{-1}$ « piu di meno », qui sera noté « i » plus tard par Euler en 1777. Grâce à ce stratagème, il retrouve la solution réelle 4 :

a) Résoudre l'équation (E_3) dont U et V sont solutions en utilisant le nombre i .

b) Calculer $(2+i)(2-i)$, $(2+i)^3$ et $(2-i)^3$ sachant que $i^2 = -1$.

c) En déduire que $(2+i) + (2-i)$ est solution de l'équation (E_2).

Remarques : Les nombres imaginaires ne prendront leur statut officiel qu'à partir du XVIII^e siècle. On les appelle nombres complexes depuis Gauss (1811)

II. Définition – Représentation géométrique

1) Définitions :

a) Définition 1 :

On appelle **corps des nombres complexes**, et on note \mathbb{C} un ensemble contenant \mathbb{R} tel que :

- Il existe dans \mathbb{C} un élément noté i tel que $i^2 = -1$.
- Tout élément de \mathbb{C} s'écrit sous la forme $a + bi$, où a et b sont des réels.
- \mathbb{C} est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent l'addition et la multiplication de \mathbb{R} , et qui suivent les mêmes règles de calcul.

Remarque : Un nombre complexe sera souvent représenté par la lettre z .

Cas particuliers :

Soit un nombre complexe $z = a + bi$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

- si $b = 0$, on a $z = a$, z est un **réel**. (\mathbb{R} est contenu dans \mathbb{C})
- si $a = 0$, on a $z = bi$, on dit que z est un **imaginaire pur** (on dit parfois simplement imaginaire).

b) Définition 2 :

Soit un nombre complexe z .

L'écriture $z = a + bi$, où a et b sont des réels, est appelée **forme algébrique** du nombre complexe z .

a est appelé **partie réelle** de z , et b **partie imaginaire** de z . On note $a = \operatorname{Re}(z)$ et $b = \operatorname{Im}(z)$.

Remarques :

- La partie réelle de z est un nombre réel.
- La partie imaginaire de z est un nombre réel.

2) Propriétés :

a) Propriété 1 :

L'écriture d'un nombre complexe sous la forme $z = a + bi$, où a et b sont des réels, est unique.

Preuve :

Considérons un nombre complexe z s'écrivant de deux façons : $z = a + bi$ et $z = a' + b'i$, avec a, b, a', b' réels.

On a alors $a + bi = a' + b'i$ et on en déduit $a - a' = i(b' - b)$

Supposons que $b \neq b'$, on aurait alors $i = \frac{a - a'}{b' - b}$,

Ceci n'est pas possible puisque $i \notin \mathbb{R}$ alors que $\frac{a - a'}{b' - b} \in \mathbb{R}$

On ne peut donc pas avoir $b \neq b'$, ce qui signifie que $b = b'$.

Alors $b' - b = 0$ et comme on sait que $a - a' = i(b' - b)$, on en déduit $a - a' = 0$ c'est-à-dire $a = a'$.

On a donc obtenu $a = a'$ et $b = b'$. Les deux écritures de z sous la forme $a + bi$ et $a' + b'i$ sont donc identiques.

b) Exemples :

Soit $z = 2 + 3i$ et $z' = i - 5$. Calculer et écrire sous la forme algébrique :

$$z + z', \quad z - z', \quad 2z - 3z', \quad z.z' \text{ et } z^2.$$

c) Propriété 2 :

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

C'est-à-dire que si a, b, a', b' sont des réels, on a $a + bi = a' + b'i \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$

Preuve : (évidente)

Soit z et z' deux nombres complexes : $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$, avec a, b, a', b' réels.

On a alors $a = \operatorname{Re}(z)$, $a' = \operatorname{Re}(z')$, $b = \operatorname{Im}(z)$ et $b' = \operatorname{Im}(z')$

Si $z = z'$, alors $a + bi = a' + b'i$ et comme la forme algébrique d'un nombre complexe est unique, on en déduit que $a = a'$ et $b = b'$.

Donc z et z' ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

Réciproquement, si z et z' ont la même partie réelle et la même partie imaginaire, alors $a = a'$ et $b = b'$

et par conséquent $a + bi = a' + b'i$, c'est-à-dire $z = z'$

3) Représentation géométrique :

- \mathbb{R} correspond à l'ensemble des points sur une droite. Un nombre réel x correspond au point d'abscisse x sur la droite.

On peut donc toujours comparer deux nombres réels :

si x et y sont des réels, on a nécessairement $x \leq y$ ou $y \leq x$ (Le point d'abscisse x se trouve, sur la droite, "avant" ou "après" le point d'abscisse y)

- \mathbb{C} , ensemble des nombres $a + bi$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ correspond à l'ensemble des points d'un plan.

Un nombre complexe $a + bi$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ correspond au point du plan de coordonnées $(a ; b)$.

On ne peut donc pas comparer deux nombres complexes : il n'y a pas de relation d'ordre dans \mathbb{C} .

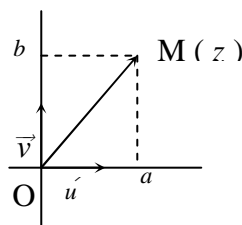
On ne peut donc pas dire qu'un nombre complexe z est inférieur à un nombre complexe z' ou qu'un nombre complexe z est positif.

a) Définition :

On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Au point M de coordonnées $(a ; b)$, on peut associer le nombre complexe $z = a + bi$.

On dit que $z = a + bi$ est **l'affixe** de M ou que $M(a ; b)$ est **l'image ponctuelle** de $z = a + bi$.



Remarque :

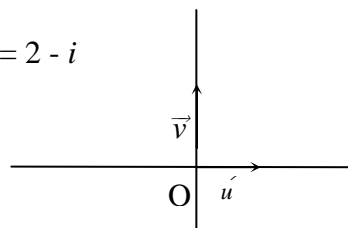
Lorsqu'on repère un point ou un vecteur par son affixe dans un repère orthonormal direct, on dit qu'on se place dans le plan complexe.

Exemple :

Placer dans le plan complexe, les points d'affixes :

$$z_1 = 2 + 2i \quad ; \quad z_2 = 3 + i \quad ; \quad z_3 = -1 + 2i \quad ; \quad z_4 = 2 - i$$

$$z_5 = i \quad z_6 = -i \quad ; \quad z_7 = 1 \quad ; \quad z_8 = -i - 3$$

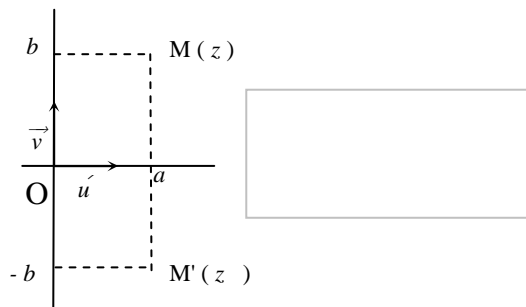


4) Conjugué d'un nombre complexe :

a) Définition :

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $a + bi$.

On appelle **conjugué** de z le nombre complexe noté \bar{z} tel que $\bar{z} = a - bi$.



Propriété :

Si M est le point d'affixe z , le point M' d'affixe \bar{z} est le symétrique de M par rapport à l'axe $(O; \vec{u})$.

b) Exemples :

Soit $z = 3 + 5i$ et $z' = -2 + 3i$. Calculer :

$$\bar{z} \quad ; \quad \bar{z}' \quad ; \quad \bar{z} + \bar{z}' \quad ; \quad z + z' \quad ; \quad \overline{z + z'} \quad ; \quad \bar{z} \cdot \bar{z}' \quad ; \quad \overline{zz'} \quad ; \quad \overline{zz'}$$

5) Forme trigonométrique d'un nombre complexe :

Rappel :

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

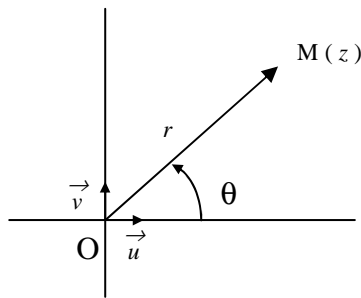
Soit $M(a; b)$ un point du plan (distinct de O).

On appelle **coordonnées polaires** de M , tout couple de nombres réels (r, θ) tel que :

$$r = OM \quad \text{et} \quad (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$$

Remarque :

Soit M le point d'affixe x avec $x \in \mathbb{R}$, on a $r = OM = |x|$



$$\begin{aligned} \text{On a alors } r &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ a &= r \cos \theta \quad \text{et} \quad b = r \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= a + ib \\ &= r \cos \theta + i r \sin \theta \\ &= r (\cos \theta + i \sin \theta) \end{aligned}$$

a) Définition :

Tout nombre complexe non nul z peut-être écrit sous la forme :

$$z = r (\cos \theta + i \sin \theta), \quad \text{avec } \theta \in \mathbb{R} \text{ et } r \in \mathbb{R}_+^*$$

On dit que $z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ est une **forme trigonométrique** de z .

b) Exemple :

$$z = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ admet } \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \text{ pour forme trigonométrique.}$$

c) Propriété 5 :

Si deux nombres complexes z et z' sont écrits sous forme trigonométrique

$$z = r (\cos \theta + i \sin \theta) \quad \text{et} \quad z' = r' (\cos \theta' + i \sin \theta'), \quad \text{on a :$$

$$z = z' \Leftrightarrow r (\cos \theta + i \sin \theta) = r' (\cos \theta' + i \sin \theta') \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' \quad [2\pi] \end{cases}$$

Preuve :

Considérons les points M et M' d'affixes respectives z et z' . On peut écrire :

$$z = z' \Leftrightarrow M = M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM = OM' \\ (\vec{u}; \overrightarrow{OM}) = (\vec{u}; \overrightarrow{OM'}) \quad [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' \quad [2\pi] \end{cases}$$

6°) Module d'un nombre complexe :

a) Définition :

Soit le nombre complexe z de forme algébrique $a + bi$ et soit M le point d'affixe z .

On appelle **module** de z le nombre réel positif $r = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$.

On note souvent $r = |z|$.

Remarque :

La notation $|z|$ ne risque pas de prêter à confusion avec la notation de la valeur absolue puisque lorsque x est un nombre réel, on a $r = OM = |x|$.

Pour un réel x , $|x|$ pourra être lu indifféremment "valeur absolue de x " ou "module de x ".

Pour un nombre complexe non réel z , $|z|$ sera lu impérativement "module de z ".

b) Exemples :

- Calculer le module de $z_1 = 3 + 4i$.
- Donner une forme trigonométrique de $z_2 = \sqrt{3} + i$.

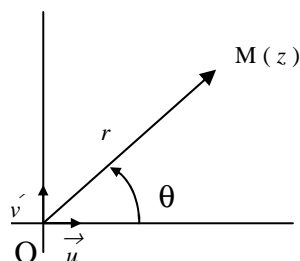
7) Argument d'un nombre complexe :

a) Définition :

Soit le nombre complexe non nul z de forme algébrique $a + bi$ et soit M le point d'affixe z .

On appelle **argument** de z tout nombre réel θ tel que $\theta = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) [2\pi]$.

On note souvent $\theta = \arg(z)$



Remarque :

θ n'est pas unique, il est défini à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$) ; on dit « modulo 2π ».

III. Propriétés

1) Propriétés relatives aux conjugués de nombres complexes :

Propriété :

Pour tous nombres complexes z et z' , on a :

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $z \cdot \overline{z}$ est un réel positif (utilise pour la forme algébrique de l'inverse ou d'un quotient)
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}$; $\overline{zz'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$
- Si $z' \neq 0$ $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$; $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
- $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$; $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$; $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\overline{z}$

Preuve :

Soit les nombres complexes écrits sous la forme algébrique : $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$.

- $\overline{z} = a - bi$ donc $\overline{\overline{z}} = a + bi = z$
- $z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2$ donc $z \cdot \overline{z}$ est un réel positif.
- $z + z' = a + bi + a' + b'i = (a + a') + (b + b')i$.

Comme $(a + a')$ et $(b + b')$ sont des réels, on obtient :

$$\overline{z + z'} = (a + a') - (b + b')i = a - bi + a' - b'i = \overline{z} + \overline{z'}$$

- $z - z' = a + bi - (a' + b'i) = (a - a') + (b - b')i$.

Comme $(a - a')$ et $(b - b')$ sont des réels, on obtient :

$$\overline{z - z'} = (a - a') + (b - b')i = a - bi - a' + b'i = \overline{z} - \overline{z'}$$

- $zz' = (a + bi)(a' + b'i) = aa' + ab'i + a'bi + bb'i^2 = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$

Comme $(aa' - bb')$ et $(ab' + a'b)$ sont des réels, on obtient :

$$\overline{zz'} = (aa' - bb') - (ab' + a'b)i$$

D'autre part :

$$\overline{z \cdot \overline{z'}} = (a - bi)(a' - b'i) = aa' - ab'i - a'bi + bb'i^2 = (aa' - bb') - (ab' + a'b)i = \overline{zz'}$$

- Si $z' \neq 0$ $\frac{1}{z'} = \frac{1}{a' + b'i} = \frac{a' - b'i}{(a' + b'i)(a' - b'i)} = \frac{a' - b'i}{a'^2 + b'^2} = \frac{a'}{a'^2 + b'^2} + \frac{-b'}{a'^2 + b'^2}i$

Comme $\frac{a'}{a'^2 + b'^2}$ et $\frac{-b'}{a'^2 + b'^2}$ sont des réels, on obtient : $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{a'}{a'^2 + b'^2} + \frac{b'}{a'^2 + b'^2}i$

D'autre part $\overline{z'} = a' - b'i$, donc :

$$\frac{1}{\overline{z'}} = \frac{1}{a' - b'i} = \frac{a' + b'i}{(a' - b'i)(a' + b'i)} = \frac{a' + b'i}{a'^2 + b'^2} = \frac{a'}{a'^2 + b'^2} + \frac{b'}{a'^2 + b'^2}i = \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}$$

- Si $z' \neq 0$ $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \overline{\left(z \times \frac{1}{z'}\right)} = \overline{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \overline{z} \times \frac{1}{z'} = \frac{\overline{z}}{z'}$

- $\frac{z + \overline{z}}{2} = \frac{a + bi + a - bi}{2} = \frac{2a}{2} = a = \text{Re}(z)$; $\frac{z - \overline{z}}{2i} = \frac{a + bi - (a - bi)}{2i} = \frac{2bi}{2i} = b = \text{Im}(z)$

- $z = \overline{z} \Leftrightarrow a + bi = a - bi \Leftrightarrow a + bi - a + bi = 0 \Leftrightarrow 2bi = 0 \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

- $z = -\overline{z} \Leftrightarrow a + bi = -a + bi \Leftrightarrow 2a = 0 \Leftrightarrow a = 0 \Leftrightarrow \text{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$

2) Propriétés relatives aux modules de nombres complexes:

Propriété 1 :

- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

- $|-z| = |z|$

- $|\overline{z}| = |z|$

- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

- $|zz'| = |z| \cdot |z'|$

si $z' \neq 0$ $\left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{|z'|}$

- si $z' \neq 0$ $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

- $z \overline{z} = |z|^2$ (on retrouve $z \overline{z} \in \mathbb{R}_+$)

- si $z \neq 0$ $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$

Preuve :

- Soit M le point d'affixe z dans le plan rapporté au repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On peut écrire : $|z| = 0 \Leftrightarrow OM = 0 \Leftrightarrow M = O \Leftrightarrow z = 0$

- Le point M' d'affixe $-z$ est symétrique du point M par rapport à l'origine O.

La symétrie conservant les distances on a : $OM' = OM$ donc $|-z| = |z|$

- Le point M'' d'affixe \bar{z} est symétrique du point M par rapport à l'axe $(O; \vec{u})$.
La symétrie conservant les distances on a : $OM'' = OM$ donc $|\bar{z}| = |z|$

- Soit \vec{v} le vecteur d'affixe z et \vec{v}' le vecteur d'affixe z' .

On sait que le vecteur $\vec{v} + \vec{v}'$ a pour affixe $z + z'$.

En utilisant l'inégalité triangulaire, on a $\|\vec{v} + \vec{v}'\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{v}'\|$ donc

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

- Si z a pour forme algébrique $z = a + bi$ et si z' a pour forme algébrique $z' = a' + b'i$, alors :

$$z z' = (a + bi)(a' + b'i) = aa' + ab'i + a'b'i + bb'i^2 = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$$

Comme $(aa' - bb')$ et $(ab' + a'b)$ sont des réels, on en déduit que :

$$|z z'| = \sqrt{(aa' - bb')^2 + (ab' + a'b)^2} = \sqrt{a^2 a'^2 + b^2 b'^2 + a^2 b'^2 + a^2 b'^2} = \sqrt{a^2(a'^2 + b'^2) + b^2(b'^2 + a'^2)} = \sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)} = \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{a'^2 + b'^2} = |z| \cdot |z'|$$

- si $z' \neq 0$ on a, d'après la propriété précédente :

$$|z'| \times \left| \frac{1}{z'} \right| = \left| z' \times \frac{1}{z'} \right| = |1| = 1, \text{ donc } \left| \frac{1}{z'} \right| = \frac{1}{|z'|} \text{ et } \left| \frac{z}{z'} \right| = \left| z \times \frac{1}{z'} \right| = |z| \times \left| \frac{1}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$z \times \frac{1}{z'} = \frac{z}{z'}$$

- $z \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$ (donc $z \bar{z} \in \mathbb{R}_+$)

- si $z \neq 0$ $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

3) Propriétés relatives aux arguments de nombres complexes:

Propriété :

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls d'arguments respectifs θ et θ' .

On a :

- $\arg(z z') = \arg z + \arg z' \quad [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z \quad [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \quad [2\pi]$
- $\arg(z^n) = n \arg z \quad [2\pi]$
- $\arg(\bar{z}) = -\arg z \quad [2\pi]$
- $\arg(-z) = \arg z + \pi \quad [2\pi]$

Preuve :

On a : $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $r \in \mathbb{R}_+$ et $z' = r'(\cos \theta' + i \sin \theta')$ avec $r' \in \mathbb{R}_+$.

On montre facilement que :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta') = \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta').$$

On peut en déduire :

$$z z' = r r' (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta') = r r' [\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')].$$

Comme $r r'$ est un nombre réel positif, on a donc $\arg(z z') = \arg z + \arg z' \quad [2\pi]$

- On montre facilement que : $\frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta)$

On peut en déduire que : $\frac{1}{z} = \frac{1}{r} \times \frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta} = \frac{1}{r} [\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)]$

Comme $\frac{1}{r}$ est un nombre réel positif, on a donc $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\theta = -\arg z \quad [2\pi]$.

• On a :

$$\frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta' + i \sin \theta'} = (\cos \theta + i \sin \theta) \times \frac{1}{\cos \theta' + i \sin \theta'}$$

$$(\cos \theta + i \sin \theta) \times [\cos(-\theta') + i \sin(-\theta')] = \cos(\theta - \theta') + i \sin(\theta - \theta')$$

$$\text{Alors } \frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} \times \frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta' + i \sin \theta'} = \frac{r}{r'} \times [\cos(\theta - \theta') + i \sin(\theta - \theta')]$$

Comme $\frac{r}{r'}$ est un nombre réel positif, on a donc $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \theta - \theta' = \arg z - \arg z'$

• Soit P(n) la proposition : $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$.

Pour $n = 0$, on a :

$(\cos \theta + i \sin \theta)^0 = 1$ et $\cos(0 \times \theta) + i \sin(0 \times \theta) = \cos(0) + i \sin(0) = 1 + 0i = 1$,
donc P(0) est vraie.

Supposons P(n) vérifiée pour un entier naturel n, c'est-à-dire

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Alors en multipliant les deux membres par $(\cos \theta + i \sin \theta)$, on obtient :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^{n+1} = [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)] (\cos \theta + i \sin \theta) = \cos(n\theta + \theta) + i \sin(n\theta + \theta) = \cos((n+1)\theta) + i \sin((n+1)\theta)$$

P(n+1) est alors justifiée.

On a donc démontré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Lorsque on considère un entier négatif, que l'on peut noter -n avec $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire, en utilisant les propriétés déjà démontrées :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^{-n} = \frac{1}{(\cos \theta + i \sin \theta)^n} = \frac{1}{\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)} = \cos(-n\theta) + i \sin(-n\theta)$$

La proposition est donc vérifiée pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

On peut écrire $z^n = [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n = r^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$

Comme r^n est un réel positif, on a donc pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $\arg(z^n) = n \arg z \quad [2\pi]$

• Sachant que $\cos(-\theta) = \cos \theta$ et $\sin(-\theta) = -\sin \theta$, on peut écrire :

$$\cos \theta - i \sin \theta = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta)$$

$$\text{Alors } \bar{z} = r(\cos \theta - i \sin \theta) = r [\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)].$$

Comme r est un réel positif, on en déduit $\arg(\bar{z}) = -\theta = -\arg z \quad [2\pi]$

• Sachant que $\cos(\theta + \pi) = -\cos \theta$ et $\sin(\theta + \pi) = -\sin \theta$, on peut écrire :

$$-(\cos \theta + i \sin \theta) = -\cos \theta - i \sin \theta = \cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi)$$

$$\text{Alors } -z = -r(\cos \theta + i \sin \theta) = r [\cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi)].$$

Comme r est un réel positif, on en déduit $\arg(-z) = \theta + \pi = \arg z + \pi \quad [2\pi]$