Correction du devoir maison n°3

<u>Exercice 1 :</u>

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x}$. On désigne par **C** sa courbe représentative dans un repère orthogonal. L'unité graphique est 4 cm en abscisses et 8 cm en ordonnées.

Partie A : étude de *f*

1°) <u>Etude du sens de variation de la fonction f :</u>

f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$:
$x \mapsto x$ et $x \mapsto e^{-x}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$

Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$, donc $f'(x)$ est du même signe que $1-x$.

Donc :

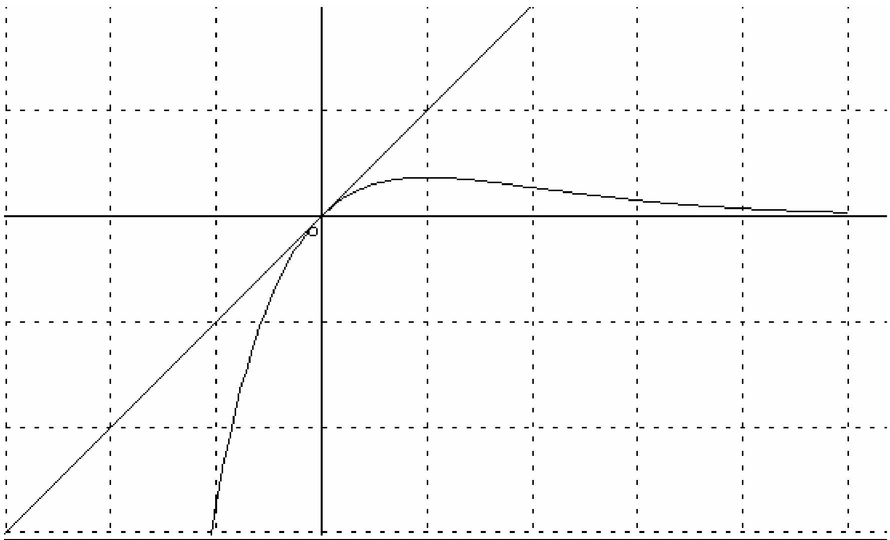
x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	

2°) <u>Equation de la tangente (T) à la courbe **C** au point d'abscisse 0</u> :

On a : (T) : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$; Or $f'(0) = 1$ et $f(0) = 0$

Donc : $\boxed{(T) : y = x}$

3°) <u>Tracés de la courbe **C** et de la droite (T) sur la même figure :</u>



4°) **a)** On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^x-x-1$.

<u>Etude des variations de g :</u>

g est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

$\forall x\in\mathbb{R}$, $g'(x)=e^x-1$

Or la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (car sa dérivée est elle-même et qu'elle est strictement positive)

Donc : $g'(x)\geq 0 \Leftrightarrow e^x-1\geq 0 \Leftrightarrow e^x\geq e^0 \Leftrightarrow x\geq 0$

Ainsi :

g est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$

g est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

<u>Montrons que</u> $\forall x\in\mathbb{R},\ e^x\geq x+1$:

Comme g est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$: $\forall x\in\,]-\infty;0[$, $g(x)>g(0)$

Comme g est strictement croissante sur $[0;+\infty[$: $\forall x\in[0;+\infty[$, $g(x)>g(0)$

Or $g(0)=0$; donc $\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x)\geq 0$

D'où : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ e^x\geq x+1}$

b) <u>Montrons que</u> : $\forall x>0,\ f(x)\leq\dfrac{x}{1+x}$:

D'après de qui précède, on a : $\forall x>0,\ e^x\geq x+1$. Comme la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$:

$\forall x>0,\ \dfrac{1}{e^x}\leq\dfrac{1}{x+1}$ et en multipliant par x (qui est strictement positif) les 2 membres :

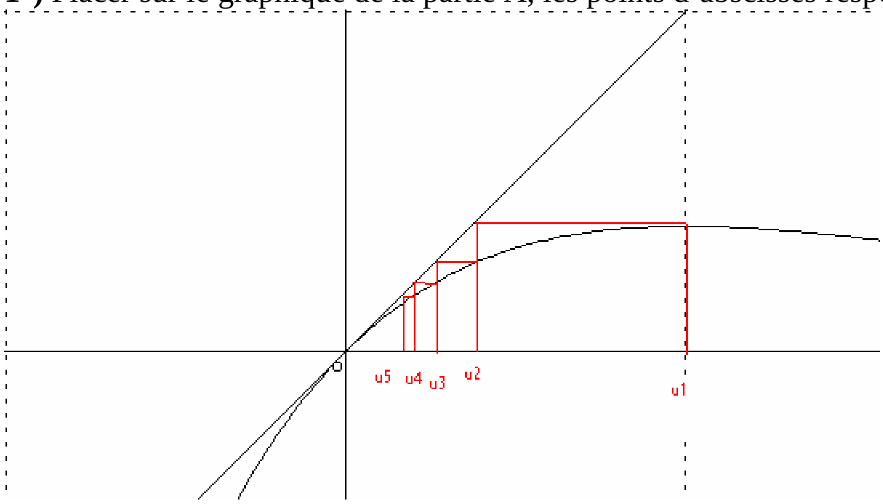
$\forall x>0,\ \dfrac{x}{e^x}\leq\dfrac{x}{x+1}$

D'où : $\boxed{\forall x>0,\ f(x)\leq\dfrac{x}{1+x}}$

Partie B : une suite récurrente

On définit la suite (u_n) définie par $u_1=1$ et pour tout entier n non nul, $u_{n+1}=f(u_n)$

1°) Placer sur le graphique de la partie A, les points d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3 et u_4.



2°) À l'aide de la calculatrice, donnons des approximations décimales à 10^{-3} près de u_5, u_{10} et u_{15} :

$$\boxed{u_5 \simeq 0{,}162 \quad ; \quad u_{10} \simeq 0{,}087 \quad ; \quad u_{15} \simeq 0{,}060}$$

3°) En utilisant l'inégalité établie en A.4°) b), démontrons par récurrence que pour tout entier n supérieur à 1 : $0 < u_n \leq \frac{1}{n}$:

▪ Initialisation : $u_1 = 1$ et donc $0 < u_1 \leq 1$

▪ Hérédité : Soit $n \geq 1$ tel que $0 < u_n \leq \frac{1}{n}$ (hypothèse de récurrence).

Montrons que $0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$:

On a : $0 < u_n \leq \frac{1}{n}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Comme $n \geq 1$, $\frac{1}{n} \leq 1$;

Or, sur $[0;1]$, f est strictement croissante, donc : $f(0) < f(u_n) \leq f\left(\frac{1}{n}\right)$

(Rappel : une fonction croissante sur un intervalle I, conserve l'ordre sur I)

D'après A. 4°) b), $\forall x > 0$, $f(x) \leq \frac{x}{1+x}$, donc $f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+1}$

Comme $\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+1} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{n+1}$, on peut donc écrire que $u_{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$

De plus, $u_{n+1} = f(u_n) = u_n e^{-u_n} > 0$

D'où : $0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$

▪ Conclusion : D'après le principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \geq 1,\ 0 < u_n \leq \frac{1}{n}}$$

4°) Montrons que la suite (u_n) est convergente :

On a : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes : $\boxed{(u_n) \text{ converge et } \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0}$

5°) Etude de la monotonie de la suite (u_n) :

La suite (u_n) est à termes strictement positifs et $\forall n \geq 1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n e^{-u_n}}{u_n} = e^{-u_n}$

Or $\forall n \geq 1$, $0 < u_n \leq \frac{1}{n}$, donc $-\frac{1}{n} \leq -u_n < 0$; comme $x \mapsto e^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$,

$e^{-u_n} < e^0$. Sachant que $e^0 = 1$, on en déduit que $\forall n \geq 1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-u_n} < 1$

Conclusion :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$$

Exercice 2 :

1°) Démontrons que pour tout entier naturel $n \geq 7,\ n! > 3^n$:

▪ Initialisation : $7! = 7\times6\times5\times4\times3\times2\times1 = 5040$ et $3^7 = 2187$, donc $7! > 3^7$

▪ Hérédité : Soit $n \geq 7$ tel que $n! > 3^n$ (hypothèse de récurrence). Montrons que $(n+1)! > 3^{n+1}$:

On a : $(n+1)! = (n+1)\times n!$. Or $n! > 3^n$ et comme $n \geq 7$, $n+1 > 3$, d'où $(n+1)\times n! > 3\times 3^n$
Par suite, $(n+1)! > 3^{n+1}$

▪ Conclusion :

$$\boxed{\forall n \geq 7,\ n! > 3^n}$$

2°) Limite de la suite (u_n) où $u_n = \dfrac{n!}{2^n}$ pour tout entier naturel n :

Pour $n \geq 7$, $n! > 3^n$ donc, en divisant par 2^n les deux membres ($2^n > 0$) : $u_n > \dfrac{3^n}{2^n}$, donc $u_n > \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ et comme $\dfrac{3}{2} > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n = +\infty$.

D'après le théorème de comparaison :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty}$$

Exercice 3 :

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $u_0 = 2,\ v_0 = -1$ et pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$$

1°) Valeurs exactes de $u_1,\ v_1,\ u_2$ et v_2 :

$$u_1 = \frac{u_0+v_0}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}\ ;\ v_1 = \frac{u_1+v_0}{2} = \frac{\frac{1}{2}-1}{2} = -\frac{1}{4}$$

$$u_2 = \frac{u_1+v_1}{2} = \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{8}\ ;\ v_2 = \frac{u_2+v_1}{2} = \frac{\frac{1}{8}-\frac{1}{4}}{2} = -\frac{1}{16}$$

2°) On pose $w_n = u_n - v_n$, pour tout entier naturel n.

a) Montrons que (w_n) est une suite géométrique dont-on précisera le premier terme w_0 et la raison q :

Pour tout entier naturel n : $w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2} - \dfrac{u_{n+1}+v_n}{2} = \dfrac{u_n - u_{n+1}}{2}$

Et $\frac{u_n - u_{n+1}}{2} = \frac{1}{2}\left(u_n - \frac{u_n + v_n}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{u_n - v_n}{2}\right) = \frac{1}{4}(u_n - v_n)$

D'où : Pour tout entier naturel n : $w_{n+1} = \frac{1}{4} w_n$

D'autre part $w_0 = u_0 - v_0 = 2 + 1 = 3$

Conclusion : $\boxed{(w_n) \text{ est une suite géométrique de raison } \frac{1}{4} \text{ et de premier terme } 3}$

b) Expression de w_n en fonction de n :

Comme (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme 3 :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : w_n = w_0 \times q^n = 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{3}{4^n}}$$

c) Justifions que (w_n) converge et déterminer sa limite :

Comme (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et que $0 < \frac{1}{4} < 1$, la suite (w_n) converge vers 0.

Conclusion : $\boxed{\lim_{n \to \infty} w_n = 0}$

3°) Démontrons que la suite (u_n) est décroissante et que la suite (v_n) est croissante :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{-u_n + v_n}{2} = -\frac{w_n}{2}$. Or $w_n = \frac{3}{4^n} > 0$, donc $u_{n+1} - u_n < 0$

Conclusion : $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} - v_n = \frac{u_{n+1} - v_n}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_n + v_n}{2} - v_n\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{u_n - v_n}{2}\right) = \frac{w_n}{4}$.

Or $w_n = \frac{3}{4^n} > 0$, donc $v_{n+1} - v_n > 0$

Conclusion : $\boxed{(v_n) \text{ est croissante}}$

4°) On pose $t_n = u_n + 2v_n$, pour tout entier naturel n.

Démontrons que pour tout entier naturel n, $t_n = 0$:

- Initialisation : On a $t_0 = u_0 + 2v_0 = 2 - 2 = 0$
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $t_n = 0$ (hypothèse de récurrence). Montrons que $t_{n+1} = 0$:

On a $t_n = u_n + 2v_n = 0$ et

$t_{n+1} = u_{n+1} + 2v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} + u_{n+1} + v_n = \frac{u_n + v_n}{2} + \frac{u_n + v_n}{2} + v_n = u_n + 2v_n = 0$

- Conclusion : D'après le principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \text{ , } t_n = 0}$$

5°)a) <u>Déterminons les expressions de</u> u_n et v_n <u>en fonction de *n* :</u>

u_n et v_n sont tels que $u_n + 2v_n = 0$ et $u_n - v_n = \frac{3}{4^n}$. En retranchant membre à membre ces deux égalités, il vient : $3v_n = -\frac{3}{4^n}$, donc $v_n = -\frac{1}{4^n}$.

Par suite, $u_n = -2v_n = \frac{2}{4^n}$.

<u>Conclusion</u> :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_n = \frac{2}{4^n} \text{ et } v_n = -\frac{1}{4^n}}$$

b) <u>Déterminons</u> $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$:

On a $\lim\limits_{n\to\infty} 4^n = +\infty$, donc :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \text{ et } \lim_{n\to\infty} v_n = 0}$$

6°) a) <u>Expression en fonction de *n* de</u> $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$:

On a : $\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^k = \dfrac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$,

Donc :

$$\boxed{S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = 2\times\frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) = \frac{8}{3}\times\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)}$$

b) Calcul de $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$:

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{8}{3}$ car $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = 0$ car $0 < \frac{1}{4} < 1$

<u>Conclusion</u> :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{8}{3}}$$

<u>Exercice 4 :</u>

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - x^2$.

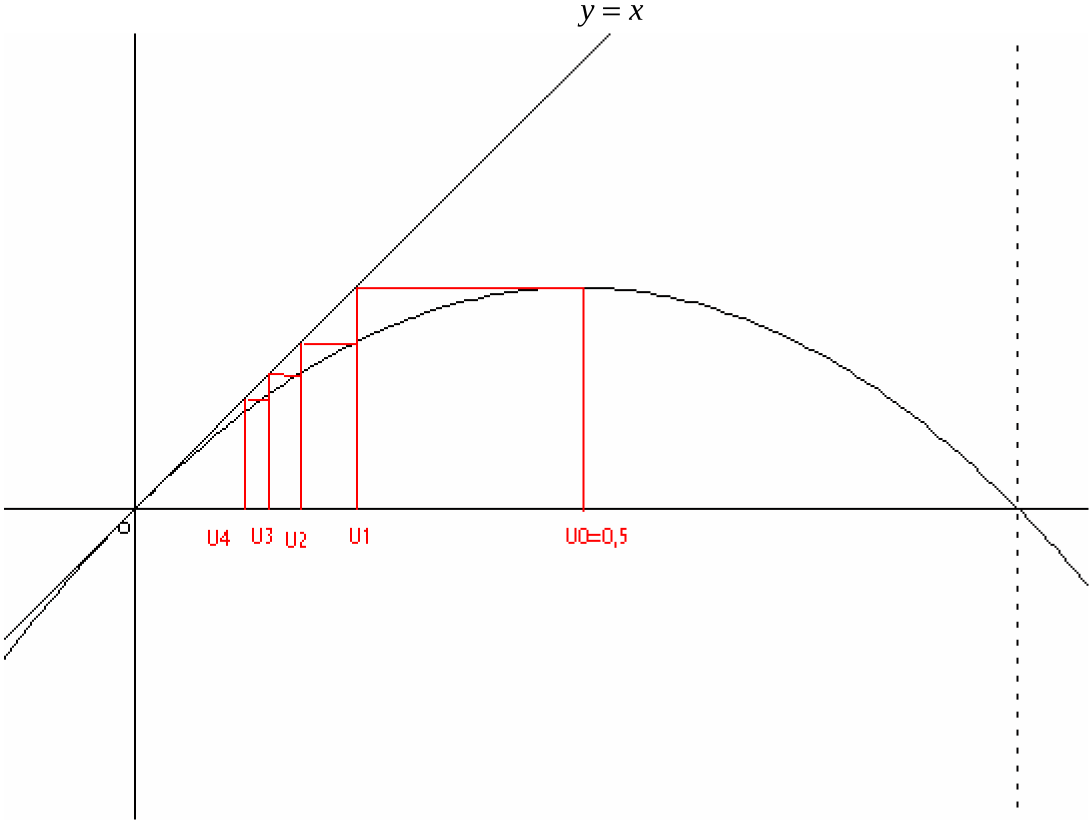
1°) <u>Etude de la fonction *f* et tracé de sa courbe représentative dans un repère</u> $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$<u>. Unité graphique : 5 cm :</u>

f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et :
$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f'(x) = 1 - 2x$

On a donc :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)=1-2x$	$+$	0	$-$
f	$-\infty$ ↗	$\frac{1}{4}$	↘ $-\infty$

Courbe représentative :



2°) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=\frac{1}{2}$ et $u_{n+1}=f(u_n)$

a) Placement sur la figure précédente, des points d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3 et u_4.

b) Calcul des valeurs exactes de u_1 et u_2 :

$u_1=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$ et $u_2=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{1}{16}=\frac{3}{16}$

Conclusion :

$$\boxed{u_1=\frac{1}{4} \text{ et } u_2=\frac{3}{16}}$$

b) A l'aide de la calculatrice, donnons des valeurs approchées à 10^{-3} près de u_{10} et de u_{20} :

D'après la calculatrice : $\boxed{u_{10}\simeq 0,069 \text{ et } u_{20}=0,040 \text{ à } 10^{-3} \text{ près par défaut}}$

3°) Etude de la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n = f(u_n)-u_n = u_n - u_n^{\ 2} - u_n = -u_n^{\ 2} < 0$

Conclusion : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

4°) Démontrer que pour tout entier naturel $p\geq 1$: $f\left(\frac{1}{p}\right)\leq\frac{1}{p+1}$

Soit $p\geq 1$. $f\left(\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{p}-\left(\frac{1}{p}\right)^2=\frac{p-1}{p^2}$.

Or, $\frac{p-1}{p^2}-\frac{1}{p+1}=\frac{(p-1)(p+1)-p^2}{p^2(p+1)}=\frac{-1}{p^2(p+1)}<0$.Donc $\frac{p-1}{p^2}\leq\frac{1}{p+1}$

Conclusion : $\forall p\geq 1$: $f\left(\frac{1}{p}\right)\leq\frac{1}{p+1}$

5°) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n\geq 1$, $0\leq u_n\leq\frac{1}{n+1}$:

- Initialisation : l'encadrement est vérifié au rang 1 : $u_1=\frac{1}{4}$ et $0\leq\frac{1}{4}\leq\frac{1}{1+1}$
- Hérédité : Soit $n\geq 1$tel que $0\leq u_n\leq\frac{1}{n+1}$ (hypothèse de récurrence).

Montrons que $0\leq u_{n+1}\leq\frac{1}{n+2}$:

On a : $0\leq u_n\leq\frac{1}{n+1}\leq\frac{1}{2}$car $n+1\geq 2$; f étant strictement croissante sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$:

$f(0)\leq f(u_n)\leq f\left(\frac{1}{n+1}\right)$et d'après 4°) : $f\left(\frac{1}{n+1}\right)\leq\frac{1}{n+1+1}$

Comme $f(0)=0$ et $f(u_n)=u_{n+1}$: $0\leq u_{n+1}\leq\frac{1}{n+2}$

- Conclusion : D'après le principe de récurrence :

$\forall n\geq 1,\ 0\leq u_n\leq\frac{1}{n+1}$

6°) Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donnons sa limite :

On a $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$, donc d'après le théorème des gendarmes :

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$