Correction du devoir sur Table de Mathématiques n°2

EXERCICE 1 : (4 points)

1°) **a)** Calcul de $P(2)$:

$P(2)=2^3+2\left(\sqrt{2}-1\right)\times\ 2^2+4\left(1-\sqrt{2}\right)\times\ 2-8=8+8\sqrt{2}-8+8-8\sqrt{2}-8=0$

Donc : $\boxed{P(2)=0}$

b) Déterminons trois nombres réels a, b et c tels que :pour tout nombre complexe z :

$$P(z)=(z-2)\ \left(az^2+bz+c\right).$$

Pour tout nombre complexe z : $(z-2)\left(az^2+bz+c\right)=az^3+bz^2+cz-2az^2-2bz-2c$

Donc : $(z-1)\left(az^2+bz+c\right)=az^3+(b-2a)z^2+(c-2b)z-2c$

Ainsi

$P(z)=(z-2)\ \left(az^2+bz+c\right)\Leftrightarrow$

$z^3+2\left(\sqrt{2}-1\right)\ z^2+4\left(1-\sqrt{2}\right)\ z-8=az^3+(b-2a)z^2+(c-2b)z-2c$

Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} a=1 \\ b-2a=2\left(\sqrt{2}-1\right) \\ c-2b=4\left(1-\sqrt{2}\right) \\ -2c=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2\sqrt{2} \\ c=4 \end{cases}$$ d'où : $\boxed{P(z)=(z-2)\left(z^2+2\sqrt{2}z+4\right)}$

c) Résolution dans Z de $z^2+2\sqrt{2}\ z+4=0$:

$\Delta=\left(2\sqrt{2}\right)^2-4\times4=8-16=-8<0$, donc l'équation $z^2+2\sqrt{2}\ z+4=0$ admet 2 solutions complexes conjuguées :

$$z_1=\frac{-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i}{2}=\sqrt{2}\,(-1+i) \text{ et } z_2=\overline{z_1}=\sqrt{2}\,(-1-i)$$

Conclusion : $\boxed{\text{Les solutions de l'équation } z^2+2\sqrt{2}z+4=0 \text{ sont } \sqrt{2}\,(-1-i) \text{ et } \sqrt{2}\,(-1+i)}$

Solutions de l'équation $P(z)=0$:

$P(z)=0\Leftrightarrow(z-2)\left(z^2+2\sqrt{2}z+4\right)=0\Leftrightarrow z-2=0$ ou $z^2+2\sqrt{2}z+4=0$

Donc : $\boxed{\text{Les solutions de l'équation } P(z)=0 \text{ sont } 2,\ \sqrt{2}\,(-1-i) \text{ et } \sqrt{2}\,(-1+i)}$

On a donc $z_1=\sqrt{2}(-1+i)$ et $z_2=\sqrt{2}(-1-i)$

2°) Ecriture de z_1 et z_2 sous forme exponentielle :

• Pour z_1 :

$|z_1|=\sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{2}^2}=\sqrt{2+2}=\sqrt{4}=2$.

On note $\theta_1=\arg(z_1)$. On cherche $\theta_1\in\mathbb{R}$ tel que $\begin{cases}\cos\theta_1=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

On a donc : $\theta_1=\arg(z_1)=\dfrac{3\pi}{4}$

D'où $\boxed{z_1=2e^{i\frac{3\pi}{4}}}$

• Pour z_2 : Comme $z_2=\overline{z_1}$:

$|z_2|=|z_1|=2$ et $\arg(z_2)=-\arg(z_1)=-\dfrac{3\pi}{4}$

D'où $\boxed{z_2=2e^{-i\frac{3\pi}{4}}}$

EXERCICE 2 : *(5 points)*

On considère $\lambda=e^{2i\frac{\pi}{5}}$. On pose $A=\lambda+\lambda^4$ et $B=\lambda^2+\lambda^3$.

1°) Démontrons que : $1+\lambda+\lambda^2+\lambda^3+\lambda^4=0$

$\lambda=e^{2i\frac{\pi}{5}}$, donc $\lambda\neq1$. On a $1+\lambda+\lambda^2+\lambda^3+\lambda^4=1\times\dfrac{1-\lambda^5}{1-\lambda}=0$, car $\lambda^5=\left(e^{2i\frac{\pi}{5}}\right)^5=e^{2i\pi}=1$.

D'où : $\boxed{1+\lambda+\lambda^2+\lambda^3+\lambda^4=0}$

2°) a) Montrons que : $A+B=-1$ et $A\times B=-1$:

D'après **1°)**, $1+A+B=0$, donc $A+B=-1$

D'autre part : $A\times B=\left(\lambda+\lambda^4\right)\left(\lambda^2+\lambda^3\right)=\lambda^3+\lambda^4+\lambda^6+\lambda^7=\lambda^3\left(1+\lambda+\lambda^3+\lambda^4\right)$

Or, d'après 1°),

$1+\lambda+\lambda^3+\lambda^4=-\lambda^2$, donc $\lambda^3\left(1+\lambda+\lambda^3+\lambda^4\right)=\lambda^3\times\left(-\lambda^2\right)=-\lambda^5=-1$

Conclusion : $\boxed{A+B=-1 \text{ et } A\times B=-1}$

b) Montrons que A et B sont solutions de l'équation $(E) : x^2+x-1=0$:

Comme $S=A+B=-1$ et $P=A\times B=-1$, A et B sont solutions de l'équation $x^2-Sx+P=0$, donc $x^2+x-1=0$

Conclusion : $\boxed{A \text{ et } B \text{ sont solutions de l'équation } (E) : x^2+x-1=0}$

3°) Expression de A en fonction de $\cos\frac{2\pi}{5}$:

$A=\lambda+\lambda^4=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}+i\sin\frac{8\pi}{5}$. Or $\frac{8\pi}{5}=2\pi-\frac{2\pi}{5}$, donc :

$$\cos\frac{8\pi}{5}=\cos\left(2\pi-\frac{2\pi}{5}\right)=\cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right)=\cos\frac{2\pi}{5}$$

et

$$\sin\frac{8\pi}{5}=\sin\left(2\pi-\frac{2\pi}{5}\right)=\sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right)=-\sin\frac{2\pi}{5}$$

Ainsi : $\boxed{A=2\cos\frac{2\pi}{5}}$

4°) Résolution de l'équation (E) et valeur exacte de $\cos\frac{2\pi}{5}$:

$(E) : x^2+x-1=0$:

$\Delta=1^2-4\times(-1)\times1=1+4=5>0$, donc l'équation (E) admet deux solutions réelles distinctes :

$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

Comme $A=2\cos\frac{2\pi}{5}>0$, on en déduit que $A=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

D'où : $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{A}{2}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Conclusion : $\boxed{\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}}$

EXERCICE 3 : ***(5 points)***

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\frac{u_n}{\sqrt{u_n{}^2+1}}$

1°) Démontrons que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n>0$, par récurrence :

- Initialisation : $u_0=1$, donc $u_0>0$
- Hérédité : soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $u_n>0$ (hypothèse de récurrence). Montrons que $u_{n+1}>0$:

On a $u_{n+1}=\frac{u_n}{\sqrt{u_n{}^2+1}}$ et comme $u_n>0$ et $\sqrt{u_n{}^2+1}>0$, on en déduit que $u_{n+1}>0$

• Conclusion : $\boxed{\text{D'après le principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0}$

2°) Etude de la monotonie de la suite (u_n) :

La suite (u_n) étant à termes strictement positifs, comparons $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ à 1 :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}}}{u_n} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}} \times \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\sqrt{u_n^2+1}}$$

Or, $u_n^2+1 \geq 1$ et comme la fonction $\sqrt{\ }$ est croissante sur $[0;+\infty[$: $\sqrt{u_n^2+1} \geq \sqrt{1} = 1$, donc :

$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{\sqrt{u_n^2+1}} \leq 1$ et par suite $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$

Conclusion : $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante}}$

3°) Convergence de la suite (u_n) :

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 ; d'après le théorème de convergence monotone : $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$

4°) Calcul des cinq premiers termes (valeurs exactes) de la suite (u_n) :

• $u_0 = 1$

• $u_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

• $u_2 = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}+1}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

• $u_3 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{\frac{1}{3}+1}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{\frac{4}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{\sqrt{4}}$

• $u_4 = \frac{\frac{\sqrt{4}}{4}}{\sqrt{\frac{1}{4}+1}} = \frac{\frac{\sqrt{4}}{4}}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = \frac{\sqrt{4}}{4} \times \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Conjecture de l'expression de u_n en fonction de n : $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

Démontrons ce résultat par récurrence :

• Initialisation : $u_0 = 1$ et $\frac{1}{\sqrt{0+1}} = 1$, donc $u_0 = \frac{1}{\sqrt{0+1}}$

• Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ (hypothèse de récurrence).

Montrons que $u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+2}}$:

On a $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{{u_n}^2+1}} = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{\dfrac{1}{n+1}+1}} = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{\dfrac{n+2}{n+1}}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \times \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+2}}$

• <u>Conclusion :</u> D'après le principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}}$$

<u>EXERCICE 4:</u> ***(6 points)***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x - 1$

1°) a) <u>Etude des variations de la fonction f :</u>

La fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^x - 1$

Comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

$x < 0 \Leftrightarrow e^x < e^0 \Leftrightarrow e^x < 1$ et $x \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq e^0 \Leftrightarrow e^x \geq 1$

Donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

b) <u>Justifions que :</u> $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$:

f admet 0 comme minimum (en 0), donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$

2°) <u>Justifier brièvement que : pour tout entier naturel n non nul, la fonction $x \mapsto x^n$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$:</u>

Soit *n* un entier naturel non nul.

$x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x >$, $\left(x^n\right)' = nx^{n-1} > 0$ et $\left(\dfrac{1}{x^n}\right)' = \dfrac{-n}{x^{n+1}} < 0$

<u>Donc :</u>

$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n \text{ non nul, la fonction } x \mapsto x^n \text{ est strictement croissante sur }]0;+\infty[\text{ et que la fonction } x \mapsto \frac{1}{x^n} \text{ est strictement décroissante sur }]0;+\infty[}$

3°) Montrons que pour tout entier naturel n non nul :

$$(1)\ e^{\frac{1}{n}} \geq 1+\frac{1}{n} \quad \text{puis que} \quad (2)\ e^{-\frac{1}{n+1}} \geq 1-\frac{1}{n+1}$$

D'après **1°) b)** : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x - x - 1 \geq 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq 1+x$

• Pour $x=\frac{1}{n}$: $e^{\frac{1}{n}} \geq 1+\frac{1}{n}$

• Pour $x=-\frac{1}{n+1}$: $e^{-\frac{1}{n+1}} \geq 1-\frac{1}{n+1}$

4°) a) En utilisant (1), démontrons que pour tout entier naturel n non nul : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e$

D'après l'inégalité (1) $e^{\frac{1}{n}} \geq 1+\frac{1}{n}$ et comme la fonction $x \mapsto x^n$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$:

$\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Or $\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n = e^{\frac{1}{n}\times n} = e^1 = e$

Ainsi : $\boxed{e \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$

b) En utilisant (2), démontrons que pour tout entier naturel n non nul : $e \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

D'après (2) : $e^{-\frac{1}{n+1}} \geq 1-\frac{1}{n+1}$ et comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^{n+1}}$ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$:

$\left(e^{-\frac{1}{n+1}}\right)^{-(n+1)} \leq \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}$. Or $\left(e^{-\frac{1}{n+1}}\right)^{-(n+1)} = e^{\frac{-1}{n+1}\times(-(n+1))} = e^1 = e$

et $\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-(n+1)} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

Ainsi : $\boxed{e \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}$

5°) Encadrement de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ puis $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$:

On a : $e \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ et $e \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Or $1+\frac{1}{n} > 0$, donc $\frac{e}{1+\frac{1}{n}} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

D'où : $\frac{e}{1+\frac{1}{n}} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e$ et comme $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e}{1+\frac{1}{n}} = e$ car $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, d'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e}$$