Correction de l'interrogation écrite n°2

Pour tout nombre complexe z , on considère $P(z) = z^3 - (1+\sqrt{2})z^2 + (1+\sqrt{2})z - 1$

1°) **a)** <u>Vérifions que</u> $P(1) = 0$:

$P(1) = 1^3 - (1+\sqrt{2})\times 1^2 + (1+\sqrt{2})\times 1 - 1 = 1 - 1 - \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} - 1 = 0$

D'où : $\boxed{P(1) = 0}$

b) <u>Déterminons trois nombres réels *a*, *b* et *c* tels que</u> : $P(z) = (z-1)(az^2 + bz + c)$:

Pour tout nombre complexe z : $(z-1)(az^2 + bz + c) = az^3 + bz^2 + cz - az^2 - bz - c$
Donc : $(z-1)(az^2 + bz + c) = az^3 + (b-a)z^2 + (c-b)z - c$

Ainsi
$P(z) = (z-1)(az^2 + bz + c) \Leftrightarrow z^3 - (1+\sqrt{2})\ z^2 + (1+\sqrt{2})\ z - 1 = az^3 + (b-a)z^2 + (c-b)z - c$
Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = -(1+\sqrt{2}) \\ c - b = 1 + \sqrt{2} \\ -c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -\sqrt{2} \\ c = 1 \end{cases} \quad \text{d'où :} \boxed{P(z) = (z-1)(z^2 - \sqrt{2}z + 1)}$$

2°) **a)** <u>Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation</u> $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$:

$\Delta = (-\sqrt{2})^2 - 4 = 2 - 4 = -2 < 0$, donc l'équation $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$ admet 2 solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$$

<u>Conclusion :</u> Les solutions de l'équation $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$ sont $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

b) <u>Solutions de l'équation</u> $P(z) = 0$.

$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2 - \sqrt{2}z + 1) = 0 \Leftrightarrow z - 1 = 0$ ou $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$

Donc : Les solutions de l'équation $P(z) = 0$ sont 1, $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$