

Devoir maison n°3 pour le 16 novembre 2011**Exercice 1 :**

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = xe^{-x}$. On désigne par \mathbf{C} sa courbe représentative dans un repère orthogonal. L'unité graphique est 4 cm en abscisses et 8 cm en ordonnées.

Partie A : étude de f

- 1°) Etudier le sens de variation de la fonction f .
- 2°) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe \mathbf{C} au point d'abscisse 0.
- 3°) Tracer la courbe \mathbf{C} et la droite (T) sur la même figure.
- 4°) **a)** On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = e^x - x - 1$. Après avoir étudié les variations de g , montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$.
b) En déduire que : $\forall x > 0, f(x) \leq \frac{x}{1+x}$.

Partie B : une suite récurrente

On définit la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et pour tout entier n non nul, $u_{n+1} = f(u_n)$

- 1°) Placer sur le graphique de la partie A, les points d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3 et u_4 .
- 2°) À l'aide de la calculatrice, donner des approximations décimales à 10^{-3} près de u_5, u_{10} et u_{15} .
- 3°) En utilisant l'inégalité établie en A.4°) b), démontrer par récurrence que pour tout entier n supérieur à 1, $0 < u_n \leq \frac{1}{n}$.
- 4°) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
- 5°) Etudier la monotonie de la suite (u_n) .

Exercice 2 :

- 1°) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 7$, $n! > 3^n$.
- 2°) En déduire la limite de la suite (u_n) où $u_n = \frac{n!}{2^n}$ pour tout entier naturel n .

Exercice 3 :

On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par : $u_0 = 2, v_0 = -1$ et pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$$

- 1°) Calculer les valeurs exactes de u_1, v_1, u_2 et v_2 .
- 2°) On pose $w_n = u_n - v_n$, pour tout entier naturel n .
a) Montrer que (w_n) est une suite géométrique dont-on précisera le premier terme w_0 et la raison q .

- b) Exprimer w_n en fonction de n .
- c) Justifier que (w_n) converge et déterminer sa limite.

3°) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante et que la suite (v_n) est croissante.

4°) On pose $t_n = u_n + 2v_n$, pour tout entier naturel n . Démontrer que pour tout entier naturel n ,

$$t_n = 0$$

5°) a) Déterminer les expressions de u_n et v_n en fonction de n .

b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$.

6°) a) Exprimer en fonction de n , $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

b) Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

Exercice 4 :

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x - x^2$.

1°) Etudier la fonction f et tracer sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Unité graphique : 5 cm.

2°) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

a) Placer sur la figure précédente, les points d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3 et u_4 .

b) Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2 .

c) A l'aide de la calculatrice, donner des valeurs approchées à 10^{-3} près de u_{10} et de u_{20} .

3°) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

4°) Démontrer que pour tout entier naturel $p \geq 1$: $f\left(\frac{1}{p}\right) \leq \frac{1}{p+1}$

5°) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$

6°) En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.