

Devoir sur Table de Mathématiques n°2**Jeudi 24 novembre 2011****Durée : 2 heures***L'usage de la calculatrice et des fiches de synthèse est autorisé.**Il est rappelé aux candidats que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.***EXERCICE 1 : (4 points)**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.

On rappelle que i est le nombre complexe de module 1 et dont un argument est $\frac{\pi}{2}$.

Pour tout nombre complexe z , on considère $P(z) = z^3 + 2(\sqrt{2} - 1)z^2 + 4(1 - \sqrt{2})z - 8$

1°) a) Calculer $P(2)$.

b) Déterminer trois nombres réels a , b et c tels que : pour tout nombre complexe z :

$$P(z) = (z - 2)(az^2 + bz + c).$$

c) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 + 2\sqrt{2}z + 4 = 0$. En déduire les solutions de $P(z) = 0$. (On notera z_1 la solution de partie imaginaire strictement positive et z_2 celle de partie imaginaire strictement négative)

2°) Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

EXERCICE 2 : (5 points)

On considère $\lambda = e^{\frac{2i\pi}{5}}$. On pose $A = \lambda + \lambda^4$ et $B = \lambda^2 + \lambda^3$.

1°) Démontrer que $1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \lambda^4 = 0$

2°) a) Montrer que $A + B = -1$ et $A \times B = -1$.

b) En déduire que A et B sont solutions de l'équation $(E) : x^2 + x - 1 = 0$.

3°) Exprimer A en fonction de $\cos \frac{2\pi}{5}$.

4°) Résoudre l'équation (E) et en déduire la valeur exacte de $\cos \frac{2\pi}{5}$.

EXERCICE 3: (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$

1°) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

2°) Etudier la monotonie de la suite (u_n) .

3°) La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.

4°) Calculer les cinq premiers termes (valeurs exactes) de la suite (u_n) et conjecturer une expression de u_n en fonction de n . Démontrer ce résultat par récurrence.

EXERCICE 4: (6 points)

Le but de cet exercice est déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^x - x - 1$

1°) a) Etudier les variations de la fonction f .

b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$.

2°) Justifier brièvement que : pour tout entier naturel n non nul, la fonction $x \mapsto x^n$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

3°) En déduire, à l'aide de 1°), les inégalités (1) et (2) suivantes :

Pour tout entier naturel n non nul : (1) $e^{\frac{1}{n}} \geq 1 + \frac{1}{n}$ puis que (2) $e^{-\frac{1}{n+1}} \geq 1 - \frac{1}{n+1}$

4°) a) En utilisant (1) et 2°), démontrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$$

b) En utilisant (2) et 2°), démontrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

5°) Déduire des questions précédentes un encadrement de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ puis $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.