

## Chapitre A2 : Limites de suites

Durée : 2,5 semaines	Séquence I
Démonstrations : 3	Tice :

### Limites de suites

#### A) Rappels de 1ère :

Etudier la limite d'une suite  $(u_n)$ , c'est étudier son comportement lorsque  $n \rightarrow +\infty$

#### 1°) Les différents cas possibles :

Soit une suite  $(u_n)$ .

##### a) cas n°1 :

*Si «  $u_n$  est aussi grand que l'on veut dès que  $n$  est assez grand », alors on dit que la suite  $(u_n)$  a pour limite  $+\infty$ .*

On note  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

#### De manière plus mathématique :

*Pour tout réel  $A$ , il existe un nombre entier naturel  $p$ , tel que, si  $n \geq p$ , alors  $u_n > A$   
(Tout intervalle ouvert du type  $]A; +\infty[$  contient tous les termes de la suite  $(u_n)$  à partir d'un certain rang  $p$ )*

**Exemple :**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$

##### b) cas n°2 :

*Si les termes  $u_n$  finissent par être négatifs et « si  $u_n$  est aussi grand que l'on veut en valeur absolue dès que  $n$  est assez grand », alors on dit que la suite  $(u_n)$  a pour limite  $-\infty$ .*

On note :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

#### De manière plus mathématique :

*Pour tout réel  $A$ , il existe un nombre entier naturel  $p$ , tel que si  $n \geq p$  alors  $u_n < A$   
(Tout intervalle ouvert du type  $]-\infty; A[$  contient tous les termes de la suite  $(u_n)$  à partir d'un certain rang  $p$ )*

#### Exemple :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} -n^2 = -\infty$

### c) cas n°3 :

Soit  $L$  un réel donné.

**Intuitivement, dire que  $(u_n)$  a pour limite  $L$ , signifie que lorsque  $n$  est de plus en plus grand, les nombres  $u_n$  correspondants viennent s'accumuler autour de  $L$**

C'est à dire, tout intervalle ouvert de centre  $L$  contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On note :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$

#### De manière plus mathématique :

Pour tout  $\varepsilon (\varepsilon > 0)$ , il existe un entier naturel  $p$ , tel que, si  $n \geq p$ , alors  $u_n \in ]L - \varepsilon; L + \varepsilon[$  (c'est à dire  $L - \varepsilon < u_n < L + \varepsilon$ )

**Exemple :**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

### d) cas n°4 :

Aucun des trois cas ne se produit.

#### Exemple :

La suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = (-1)^n$  prend successivement les valeurs 1 et -1  
Ainsi  $(u_n)$  n'a pas pour limite  $+\infty$ , n'a pas pour limite  $-\infty$  et n'a pas pour limite un réel.

### 2°) Définition :

On dit qu'une suite est convergente lorsqu'elle admet une limite finie (un réel  $l$ ).

Toute suite non convergente est dite divergente.

### 3°) Propriété :

Si une suite est convergente alors sa limite est unique

#### Preuve :

Soit  $(u_n)$  une suite convergente. Supposons que la suite  $(u_n)$  admette deux limites  $l$  et  $l'$  distinctes et supposons que  $l < l'$ .

Comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$  alors tous les termes de la suite  $(u_n)$  appartiennent à tout intervalle ouvert contenant  $l$  à partir d'un certain rang. Prenons comme intervalle  $]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$  avec  $\varepsilon = \frac{l' - l}{4} > 0$   
Et notons  $N$  le rang à partir duquel tous les termes de la suite  $(u_n)$  sont dans  $]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$ .

Comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l'$  alors tous les termes de la suite  $(u_n)$  appartiennent à tout intervalle ouvert contenant  $l'$  à partir d'un certain rang. Prenons comme intervalle  $]l' - \varepsilon; l' + \varepsilon[$  avec  $\varepsilon = \frac{l' - l}{4} > 0$

Et notons  $N'$  le rang à partir duquel tous les termes de la suite  $(u_n)$  sont dans  $]l' - \varepsilon; l' + \varepsilon[$ .

Soit  $p$  un nombre entier naturel supérieur à  $N$  et à  $N'$  :

$u_p \in ]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$  et  $u_p \in ]l' - \varepsilon; l' + \varepsilon[$ , ce qui est absurde car ces deux intervalles sont disjoints :

En effet  $l' - \varepsilon > l + \varepsilon$ , car :  $l' - \varepsilon = l' - \frac{l' - l}{4} = \frac{3l' + l}{4}$  et  $l + \varepsilon = l + \frac{l' - l}{4} = \frac{3l + l'}{4}$

Et comme  $l' > l$ ,  $2l' > 2l$  donc  $3l' - l' > 3l - l$  d'où :  $3l' + l > 3l + l'$

D'où :  $l = l'$

## B) Cas des suites monotones :

### 1) Monotonie :

#### a) Définition :

Une suite  $(u_n)$  est **croissante** si, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \leq u_{n+1}$ .

Une suite  $(u_n)$  est **décroissante** si, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \geq u_{n+1}$ .

Une suite  $(u_n)$  est **monotone** si elle est croissante ou décroissante

#### Remarques :

On définit de même ces notions **strictement**.

- Si pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = u_{n+1}$ , on dit que la suite est **constante**.
- S'il existe un entier naturel  $p$  tel que, pour tout entier  $n \geq p$ , on ait  $u_n \leq u_{n+1}$ , on dit que la suite est croissante à partir du rang  $p$ . (de même pour les autres notions vues ci-dessus)
- Toutes les suites ne sont pas croissantes ou décroissantes ...  
(ex : la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = (-1)^n$ )

#### b) Méthode pour étudier le sens de variation d'une suite :

- On étudie le signe de la **différence**  $u_{n+1} - u_n$  (un raisonnement par récurrence peut être utile)
- **ou** si la suite est à termes strictement positifs on compare le **quotient**  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  à 1.

## 29 Suites bornées :

### a) Définition :

- Une suite  $(u_n)$  est **majorée** s'il existe un réel  $M$  tel que pour tout entier naturel  $n$ , on ait  $u_n \leq M$ .
- Une suite  $(u_n)$  est **minorée** s'il existe un réel  $m$  tel que pour tout entier naturel  $n$ , on ait  $u_n \geq m$ .
- Une suite  $(u_n)$  est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Comme pour les fonctions, on dit que  $M$  ( resp.  $m$  ) est **un majorant** ( resp. **minorant** ) de la suite.

### Exemples :

- Une suite croissante est minorée par son terme initial ; une suite décroissante est majorée par son terme initial.

- Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1}$ .

Pour tout entier naturel  $n$ , on a  $-1 \leq (-1)^n \leq 1$  et  $0 \leq \frac{1}{n+1} \leq 1$  ; donc  $-1 \leq u_n \leq 2$

La suite  $(u_n)$  est donc bornée .

### Remarque :

S'il existe un entier naturel  $p$  tel que, pour tout entier  $n \geq p$ , on ait  $u_n \leq M$ , on dit que la suite est majorée à partir du rang  $p$ .

(de même pour les autres notions vues ci-dessus)

## 39 Propriétés : (divergence monotone)

*Toute suite croissante non majorée diverge vers  $+\infty$ .*

*Toute suite décroissante non minorée diverge vers  $-\infty$ .*

### Preuve :

Soit  $(u_n)$  une suite croissante non majorée . Soit  $A$  un réel strictement positif.

La suite  $(u_n)$  n'est pas majorée, il existe donc un entier  $n_0$  tel que  $u_{n_0} > A$ .

Or la suite  $(u_n)$  est croissante . Ainsi pour tout  $n \geq n_0$ , on a  $u_n \geq u_{n_0} > A$ .

Ainsi pour tout  $n \geq n_0$ ,  $u_n \in ] A ; +\infty [$ .

Tout intervalle de la forme  $] A ; +\infty [$  contient donc tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, et par conséquent  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

(On démontre d'une façon similaire qu'une suite décroissante non minorée a pour limite  $-\infty$ )

### Remarques :

Une suite non majorée n'a pas nécessairement pour limite  $+\infty$ . Une telle suite a des termes aussi grands que l'on veut puisqu'elle n'est pas majorée, mais elle n'a pas nécessairement ses termes aussi grands que l'on veut à partir d'un certain rang.

On peut citer comme exemple la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = ((-1)^n + 1) n$

#### 4) Théorème de convergence monotone : (admis)

*Toute suite croissante majorée est convergente.*

*Toute suite décroissante minorée est convergente.*

#### Remarque :

La propriété permet de justifier qu'une suite est convergente, mais elle ne permet pas de donner la limite.

D'après les propriétés vues sur les limites, si une suite est majorée par M, sa limite, si elle existe, est nécessairement inférieure ou égale à M.

• Lorsqu'une suite définie par récurrence est convergente, la relation de récurrence permet de déterminer une relation vérifiée par la limite.

#### Exemple :

Soit une suite  $(u_n)$  vérifiant la relation de récurrence  $u_{n+1} = 3u_n + 5$ .

Si  $(u_n)$  est convergente, alors sa limite L vérifie la relation :

$$L = 3L + 5 \Leftrightarrow L = -\frac{5}{2}$$

**Attention :** Cette relation ne permet en aucun cas d'affirmer que cette suite est convergente.

Si  $u_0 = -\frac{5}{2}$ , la suite est convergente (c'est une suite constante) et si  $u_0 \neq -\frac{5}{2}$  la suite n'est pas convergente (elle a pour limite  $+\infty$  ou  $-\infty$ )

#### C) Théorèmes de comparaisons :

##### 1) Théorème « des gendarmes » :

*Soit  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  trois suites vérifiant à partir d'un certain rang  $u_n \leq w_n \leq v_n$ .*

*Si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont deux suites convergentes de même limite l, alors la suite  $(w_n)$  est convergente et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$*

#### **Preuve :**

Soit  $\varepsilon > 0$ .

Il existe un entier naturel  $p_1$ , tel que, si  $n \geq p_1$ ,  $l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon$

De même, il existe un entier naturel  $p_2$ , tel que, si  $n \geq p_2$ ,  $l - \varepsilon < v_n < l + \varepsilon$

Soit N le plus grand des entiers  $p_1$  et  $p_2$  :

Ainsi pour tout  $n > N$ , on a  $l - \varepsilon < u_n \leq w_n \leq v_n < l + \varepsilon$  et donc  $l - \varepsilon < w_n < l + \varepsilon$

##### 2) Théorème de comparaison :

*Soit  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  deux suites vérifiant à partir d'un certain rang  $u_n \leq v_n$ .*

*\* Si  $(u_n)$  est une suite divergente vers  $+\infty$ , alors la suite  $(v_n)$  est divergente vers  $+\infty$*

*\* Si  $(v_n)$  est une suite divergente vers  $-\infty$ , alors la suite  $(u_n)$  est divergente vers  $-\infty$*

#### **Preuve :**

Utiliser les définitions de divergence d'une suite vers  $+\infty$  et vers  $-\infty$ .