Chapitre GP3 : Les nombres complexes (2)

Durée : 1 semaine	Séquence II
Démonstrations : 1	Tice : 0

Objectifs du chapitre :

Introduire la forme exponentielle d'un nombre complexe et résoudre des équations du second degré dans $\mathbb{C}$

Points du programme visés :

Contenus	Modalités de mise en oeuvre	Commentaires
Ecriture $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$.	La notation exponentielle sera introduite après avoir montré que la fonction $\theta \mapsto \cos\theta+i\sin\theta$ vérifie l'équation fonctionnelle caractéristique des fonctions exponentielles.	Les nombres complexes permettent de retrouver et de mémoriser les formules trigonométriques d'addition et de duplication vues en première.
Résolution dans $\mathbb{C}$ des équations du second degré à coefficients réels.		

I. Forme exponentielle d'un nombre complexe

1°) Acticité :

On considère la fonction $f:\ \theta \mapsto \cos\theta + i\sin\theta$ définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.
1°) Montrer que pour tous réels θ et θ' : $f(\theta+\theta') = f(\theta)\times f(\theta')$
2°) De quelle fonction la relation $f(\theta+\theta') = f(\theta)\times f(\theta')$ est-elle caractéristique ?

2°) Notation :

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ *et par conséquent pour* $r \in \mathbb{R}_+^*$ $r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,e^{i\theta}$
Cette notation est appelée ***notation exponentielle***

3°) Exemple :

Soit $z = 1+i$, on a $|z| = \sqrt{2}$ et $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$, donc une forme exponentielle de z est $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

Remarque : l'écriture $-3e^{i\frac{\pi}{3}}$ n'est pas une forme exponentielle car -3<0.

4°) Propriétés :

Les résultats déjà vus s'écrivent, avec la notation exponentielle :

$$e^{i\theta}\times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \qquad \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{i(-\theta)} = e^{-i\theta} \qquad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = e^{ni\theta} \quad n \in \mathbb{Z}$$

Remarques :

- La propriété $e^{i\theta}\times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$, facile à retenir, permet de retrouver les **formules d'addition** :
  $\cos(\theta+\theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'$ et $\sin(\theta+\theta') = \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta'$
- La propriété $(e^{i\theta})^2 = e^{2i\theta}$ permet de retrouver les **formules de duplication** :
  $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ et $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$
- On peut vérifier que : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$. Ce sont les **formules d'EULER** (non exigibles)

- La relation $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$ est appelée **formule de MOIVRE**

II. Equation du second degré à coefficients réels

1°) Activité :

Soit z un nombre complexe et a, b et c trois réels (avec $a \neq 0$)

Ecrire az^2+bz+c sous forme canonique et résoudre l'équation $az^2+bz+c=0$

2) Propriété :

L'équation $az^2 + bz + c = 0$, où a, b et c sont des réels (avec $a \neq 0$) admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions (éventuellement confondues).
Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation. Δ est un nombre réel.

- si $\Delta \geq 0$, les deux solutions sont réelles : $z_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
- si $\Delta < 0$, les deux solutions sont des nombres complexes non réels, conjugués l'un de l'autre : $z_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Le trinôme $az^2 + bz + c$ peut alors se factoriser sous la forme $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$

Preuve :

On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$, où a, b et c sont des réels (avec $a \neq 0$)
On peut écrire :

$$az^2 + bz + c = a\left[z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

$$= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

- si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions réelles, et deux seulement . Comme $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, l'équation a donc deux solutions complexes et deux seulement
  qui sont :
  $$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$
  (Ce résultat a déjà été vu en classe de 1ère)
- si $\Delta = 0$, l'équation a une solution réelle $z = -\dfrac{b}{2a}$
- si $\Delta < 0$, on utilise l'identité $z^2 + z'^2 = (z + iz')(z - iz')$

$-\Delta > 0$ et on peut écrire : $-\Delta = \sqrt{-\Delta}^{\,2}$, donc $\Delta = -\sqrt{-\Delta}^{\,2} = i^2\sqrt{-\Delta}^{\,2} = (i\sqrt{-\Delta})^2$
on obtient alors :

$$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{(i\sqrt{-\Delta})^2}{4a^2}\right] = a\left(z - \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z - \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)$$

On en déduit que l'équation $az^2 + bz + c = 0$ a deux solutions complexes qui sont :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Ces deux solutions sont des nombres complexes non réels, conjugués l'un de l'autre.

3) Applications :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 4z + 5 = 0$