

**Devoir maison n°4 pour le 4 janvier 2012****Exercice 1 :**

1°) Vérifier que pour tout nombre complexe  $z$  :  $z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1)$

2°) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E)$  :  $z^3 = 1$ .

Ecrire les solutions sous forme algébrique et sous forme trigonométrique. On notera  $j$  la solution dont la partie imaginaire est strictement positive.

Vérifier que  $j^2 = \bar{j}$ .

3°) Calculer  $1 + j + j^2$ ,  $1 \times j \times j^2$  et  $(1 + j)^6$ .

4°) Dans le plan complexe, on considère les points A, B et C images des trois solutions de l'équation  $(E)$ . Déterminer la nature du triangle ABC et préciser l'affixe de son centre de gravité.

**Exercice 2 :**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  d'unité graphique 5 cm.

On rappelle que  $i$  est le nombre complexe de module 1 et dont un argument est  $\frac{\pi}{2}$ .

On considère les points A et B d'affixes respectives  $z_A = 1$  et  $z_B = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ .

Le but de cet exercice est de déterminer la valeur exacte de  $\cos \frac{\pi}{8}$ .

1°) a) Montrer que les points A et B appartiennent au cercle C de centre O et de rayon 1.

b) Déterminer un argument de  $z_B$ .

c) Tracer le cercle C et placer les points A et B.

d) Soit I le milieu du segment [AB] et  $z_I$  son affixe. Placer I sur la figure et montrer

que  $z_I = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}i$ .

2°) a) Calculer la distance OI et prouver que  $OI = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$ .

b) Démontrer que la droite (OI) est la bissectrice de l'angle  $\widehat{AOB}$ . En déduire un argument de  $z_I$ .

c) Ecrire  $z_I$  sous forme trigonométrique.

3°) Montrer, en utilisant les résultats précédents que  $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$ .

### Exercice 3 :

Soit  $\theta$  un nombre réel appartenant à l'intervalle  $]0; 2\pi[$ . On pose  $z = \cos \theta + i \sin \theta$  et :

$$Z = \frac{1+z}{1-z}.$$

1°) Montrer que  $Z = i \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$ .

2°) A quoi est égal  $\arg(Z)$  ? (On distinguera trois cas suivant les valeurs de  $\theta$ )

3°) A quoi est égal  $|Z|$  ?

### Exercice 4 :

Amateur de sudoku (jeu consistant à compléter une grille de nombres), Pierre s'entraîne sur un site internet.

40% des grilles de sudoku qui y sont proposées sont de niveau facile, 30% sont de niveau moyen et 30% de niveau difficile.

Pierre sait qu'il réussit les grilles de sudoku de niveau facile dans 95% des cas, les grilles de niveau moyen dans 60% des cas et de niveau difficile dans 40% des cas.

Une grille de sudoku lui est proposée par le site internet de façon aléatoire.

On considère les événements suivants :

F : « la grille est de niveau facile »

M : « la grille est de niveau moyen »

D : « la grille est de niveau difficile »

R : « Pierre réussit la grille »

1°) Traduire les données de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

2°) a) Calculer la probabilité que la grille proposée soit difficile et que Pierre la réussisse.

b) Calculer la probabilité que la grille proposée soit facile et que Pierre ne la réussisse pas.

c) Montrer que la probabilité que Pierre réussisse la grille proposée est égale à 0,68.

3°) Sachant que Pierre n'a pas réussi la grille proposée, quelle est la probabilité que ce soit une grille de niveau moyen ?

4°) Pierre a réussi la grille proposée. Sa petite sœur affirme : « Je pense que ta grille était facile ». Dans quelle mesure a-t-elle raison ? Justifier la réponse à l'aide d'un calcul.

### Exercice 5 :

Une entreprise fabrique un article dans deux unités de production notées A et B. L'unité A, assure 60% de la production.

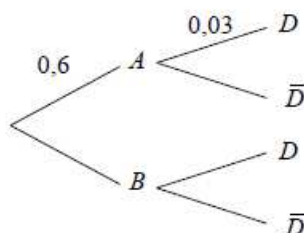
On a constaté que :

- 3% des pièces provenant de l'unité A présentent un défaut de fabrication.
- 8% des pièces provenant de l'unité B présentent un défaut de fabrication.

1°) On prélève un article au hasard, et on note :

- A l'événement « la pièce provient de l'unité A »
- B l'événement « la pièce provient de l'unité B »
- D l'événement « la pièce présente un défaut »,  $\bar{D}$  l'événement contraire.

a) Recopier et compléter l'arbre suivant :



b) Calculer la probabilité qu'un article présente un défaut et provienne de l'unité A.

c) Montrer que la probabilité qu'un article présente un défaut est égale à 0,05.

2°) L'entreprise envisage de mettre en place un test de contrôle de ces articles avant leur mise en vente. Ce contrôle détecte et élimine 82% des articles défectueux, mais il élimine également à tort 4% des articles non défectueux. Les articles non éliminés sont alors mis en vente.

On prend au hasard un article fabriqué et on note  $V$  l'évènement « l'article est mis en vente ».

a) Calculer  $p(V \cap D)$  et  $p(V \cap \bar{D})$ . En déduire que la probabilité qu'un article fabriqué soit mis en vente après contrôle est 0,921.

b) L'entreprise souhaite qu'il y ait moins de 1% des articles vendus défectueux. Ce contrôle permet-il d'atteindre cet objectif ?