Chapitre A3 : Limites et continuité d'une fonction

Durée : 3 semaines	Séquence II
Démonstrations :	Tice :

Points du programme visés :

Notion de limite finie ou infinie d'une fonction en un réel a.	On reverra à cette occasion la notion d'asymptote oblique, en se limitant aux fonctions se mettant sous la forme $ax+b+h(x)$, où h tend vers 0 à l'infini. On montrera sur des exemples que l'étude sur calculatrice ou au tableur d'une suite ou d'une fonction permet de conjecturer des limites qui devront ensuite être justifiées.	Pour les limites en un réel a, aucune définition n'est exigée : on reprendra l'approche intuitive adoptée en classe de première. Sur un exemple, on fera le lien entre limite en un réel a et à l'infini. On pourra parler de limite à droite ou à gauche à l'occasion de certains exemples.
Théorème "des gendarmes" pour les fonctions.	On démontrera ce théorème lorsque la variable tend vers l'infini. On étendra ce théorème au cas des limites infinies.	
Limites de la somme, du produit, du quotient de deux suites ou de deux fonctions ; limite de la composée de deux fonctions, de la composée d'une suite et d'une fonction.	On complétera les résultats énoncés en classe de première ; on se bornera à une justification intuitive (calculatoire ou graphique).	Ces propriétés seront appliquées comme règles opératoires.

Langage de la continuité et tableau de variations

Continuité en un point a. Continuité d'une fonction sur un intervalle.	On définira la continuité de f en un point a par $\lim\limits_{a} f = f(a)$ ou $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$. On illustrera la notion de continuité sur un intervalle en parlant de tracé sans lever le crayon. On présentera à titre de contre-exemple le cas de la fonction partie entière.	Les fonctions rencontrées en terminale sont le plus souvent continues sur leur intervalle d'étude ; on indiquera clairement que les fonctions construites à partir des fonctions polynômes, trigonométriques, logarithmes ou exponentielles sont continues. Démontrer qu'une fonction est continue en un point ou sur un intervalle n'est pas un objectif du programme.
Théorème (dit des *valeurs intermédiaires*) : "soient f une fonction définie et continue sur un intervalle I et a et b deux réels dans I. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel c compris entre a et b tel que $f(c)=k$".	Ce théorème pourra être admis ou démontré à l'aide de suites adjacentes. On démontrera le corollaire suivant : "si f est une fonction continue strictement monotone sur $[a;b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ a une solution unique dans $[a;b]$". On étendra ce corollaire au cas où f est définie sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert, borné ou non, les limites de f aux bornes de l'intervalle étant supposées connues. On pourra approcher la solution de l'équation $f(x)=k$ par dichotomie ou balayage avec la calculatrice ou au tableur.	On conviendra, dans les tableaux de variations, que les flèches obliques traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré. Dans la rédaction de la solution à un problème, une simple référence au tableau de variations suffira pour justifier l'existence et l'unicité d'une solution d'une équation du type $f(x)=k$.

Dans ce chapitre les définitions sont données de deux façons différentes et il est rappelé que la formulation avec les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ n'est pas exigible.

I. Limites d'une fonction

Dans tout le paragraphe *f* est une fonction définie sur un intervalle I et on note C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1) Limite d'une fonction en l'infini :

I contient tout un intervalle du type $]a;+\infty[$ ou $]-\infty;a[$, où *a* est un nombre réel fixé.

a) limite finie – Asymptote horizontale

• Définition 1 : (limite en $+\infty$)

Soit ℓ un nombre réel. On dit que la fonction f admet pour limite ℓ lorsque x tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand.

Autrement dit : $\forall\varepsilon>0,\ \exists\, M>0 \text{ tel que : } x>M \Rightarrow f(x)\in\left]\ell-\varepsilon;\ell+\varepsilon\right[$

On écrit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$

• Définition 2 : (limite en $-\infty$)

Soit ℓ un nombre réel. On dit que la fonction f admet pour limite ℓ lorsque x tend vers $-\infty$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment petit.

Autrement dit : $\forall\varepsilon>0,\ \exists\, M<0 \text{ tel que : } x<M \Rightarrow f(x)\in\left]\ell-\varepsilon;\ell+\varepsilon\right[$

On écrit : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$

Dans les 2 cas, on dit que la droite d'équation $y=\ell$ est asymptote (horizontale) à C .

• Exemples :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0 \text{ pour } n\in\mathbb{N}^* \ ;\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0\ ;\ \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0 \text{ pour } n\in\mathbb{N}^*$$

b) limite infinie – Asymptote oblique

• Définition 3 : (limite en $+\infty$)

i) On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ *lorsque x tend vers* $+\infty$ *lorsque tout intervalle ouvert du type* $]A;+\infty[$ *contient toutes les valeurs de* $f(x)$ *pour x suffisamment grand.*

Autrement dit : $\forall A>0,\ \exists\, M>0 \text{ tel que : } x>M \Rightarrow f(x)>A$

On écrit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ii) On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ *lorsque x tend vers* $+\infty$ *lorsque tout intervalle ouvert du type* $]-\infty;A[$ *contient toutes les valeurs de* $f(x)$ *pour x suffisamment grand.*

Autrement dit : $\forall A<0,\ \exists\, M>0 \text{ tel que : } x>M \Rightarrow f(x)<A$

On écrit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

• Définition 4 : (limite en $-\infty$)

i) On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ *lorsque x tend vers* $-\infty$ *lorsque tout intervalle ouvert du type* $]A;+\infty[$ *contient toutes les valeurs de* $f(x)$ *pour x suffisamment petit.*

Autrement dit : $\forall A>0,\ \exists\, M<0 \text{ tel que : } x<M \Rightarrow f(x)>A$

On écrit : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

ii) On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ *lorsque x tend vers* $-\infty$ *lorsque tout intervalle ouvert du type* $]-\infty;A[$ *contient toutes les valeurs de* $f(x)$ *pour x suffisamment petit.*

Autrement dit : $\forall A<0,\ \exists\, M<0 \text{ tel que : } x<M \Rightarrow f(x)<A$

On écrit : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

• Exemples :

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty \text{ pour } n\in\mathbb{N}^*$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=\begin{cases}-\infty \text{ si } n \text{ est impair}\\ +\infty \text{ si } n \text{ est pair}\end{cases} \text{ pour } n\in\mathbb{N}^*$

• Définition 5: (Asymptote oblique)

Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax+b\right]=0$ *ou* $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax+b\right]=0$, *on dit que la droite d'équation* $y=ax+b$ *est asymptote à* C en $+\infty$ ou $-\infty$.

• <u>Exemple :</u>

Soit f définie sur $\left]0;+\infty\right[$ par $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

La droite d'équation $y=x$ est asymptote oblique à C en $+\infty$

<u>b) Remarque</u>

Certaines fonctions n'ont pas de limite en l'infini : c'est le cas, par exemple de : $x\mapsto \cos x$, $x\mapsto \sin x$

<u>2) Limite d'une fonction en un nombre réel :</u>

Dans ce paragraphe on étudie le comportement de la fonction *f* définie sur un intervalle ouvert contenant un nombre réel *a* que *f* soit ou non définie en *a*.

<u>a) limite infinie en a :</u>

• <u>Définition 6 :</u> (limite en a égale à $+\infty$)

i) Dire que la fonction f admet pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers a (avec $x>a$) , c'est dire que $f(x)$ peut être rendu aussi grand que l'on veut à condition que x soit suffisamment proche de a (en restant supérieur à a)

Autrement dit : $\forall A>0,\ \exists\ \varepsilon>0$ tel que : $x\in\left]a;a+\varepsilon\right[\Rightarrow f(x)>A$

On écrit : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ *(limite à droite de a)*

ii) Dire que la fonction f admet pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers a (avec $x<a$) , c'est dire que $f(x)$ peut être rendu aussi grand que l'on veut à condition que x soit suffisamment proche de a (en restant inférieur à a)

Autrement dit : $\forall A>0,\ \exists\ \varepsilon>0$ tel que : $x\in\left]a-\varepsilon;a\right[\Rightarrow f(x)>A$

On écrit : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ *(limite à gauche de a)*

• <u>Définition 7 :</u> (limite en a égale à $-\infty$)

i) Dire que la fonction f admet pour limite $-\infty$ lorsque x tend vers a (avec $x>a$) , c'est dire que $f(x)$ peut être rendu aussi petit que l'on veut à condition que x soit suffisamment proche de a (en restant supérieur à a)

Autrement dit : $\forall A<0,\ \exists\ \varepsilon>0$ tel que : $x\in\left]a;a+\varepsilon\right[\Rightarrow f(x)<A$

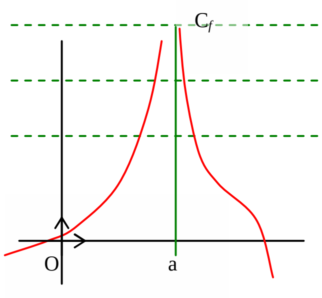
On écrit : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=-\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ *(limite à droite de a)*

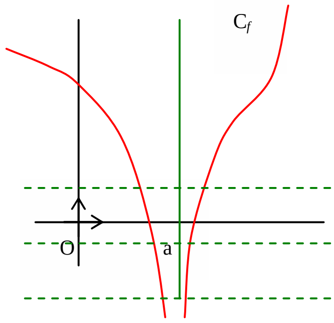
ii) Dire que la fonction f admet pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers a (avec $x<a$) , c'est dire que $f(x)$ peut être rendu aussi petit que l'on veut à condition que x soit suffisamment proche de a (en restant inférieur à a)

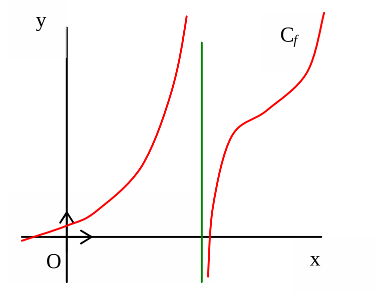
Autrement dit : $\forall A<0,\ \exists\ \varepsilon>0$ tel que : $x\in\left]a-\varepsilon;a\right[\Rightarrow f(x)<A$

On écrit : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=-\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ *(limite à gauche de a)*

Graphiquement :







Dans ce cas

$\lim\limits_{x \to a+} f(x) = -\infty$

et $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = +\infty$

• Exemples :

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$ pour $n \in \mathbb{N}^*$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} -\infty \text{ si } n \text{ est impair} \\ +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \end{cases}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

• Définition 8: (asymptote verticale)

Lorsque $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = +\infty$ *ou* $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = +\infty$ *ou* $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = -\infty$ *ou* $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = -\infty$, *on dit que la droite d'équation* $y = a$ *est asymptote verticale à* C .

Exemple :

f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \frac{1}{x-2}$;

La droite d'équation $y = 2$ est asymptote verticale à C .

b) limite finie en a :

• Définition 9 :

Soit ℓ *un nombre réel. On dit que la fonction f admet pour limite* ℓ *lorsque x tend vers a lorsque tout intervalle ouvert contenant* ℓ *contient toutes les valeurs de* $f(x)$ *pour x suffisamment proche de a.*

Autrement dit : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0$ tel que : $x \in \left]a-\eta; a+\eta\right[\setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in \left]\ell-\varepsilon; \ell+\varepsilon\right[$

On écrit : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$

Exemple : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Remarque :

Si a appartient à l'ensemble de définition de f et si f admet une limite ℓ en a, alors cette limite est $f(a)$.

c) Remarque :

Une fonction peut ne pas avoir de limite en un nombre réel. Par exemple, la fonction $x \mapsto \frac{|x|}{x}$ n'a pas de limite en 0 ; en effet $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{|x|}{x} = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{|x|}{x} = -1$

3) Limite et opérations :

En terminale S, les définitions précédentes sont peu utilisées lorsqu'on cherche la limite d'une fonction donnée. On utilise le plus souvent les règles suivantes :

a) Limite d'une somme, d'un produit de deux fonctions

Les fonctions f et g ont le même ensemble de définition.

a désigne un réel ou $-\infty$ ou $+\infty$ et ℓ, ℓ' sont des réels.

f a pour limite en a	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
g a pour limite en a	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$f+g$ a pour limite en a	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$

f a pour limite en a	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
g a pour limite en a	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$f \times g$ a pour limite en a	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Les cases FI (formes indéterminées)

Ce sont des cas où on ne peut pas conclure immédiatement et où « tout est possible » Par exemple, les fonctions suivantes étant définies sur $]0 ; +\infty[$:

b) Limite d'un quotient de deux fonctions :

Les fonctions f et g ont le même ensemble de définition D, g ne s'annule pas sur D. a désigne un réel ou $-\infty$ ou $+\infty$ et ℓ, ℓ' sont des réels.

f a pour limite en a	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
g a pour limite en a	$\ell' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\frac{f}{g}$ a pour limite en a	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

f a pour limite en a	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
g a pour limite en a	0 en restant positif	0 en restant positif	0 en restant négatif	0 en restant négatif	0
$\frac{f}{g}$ a pour limite en a	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Remarque :

Ces propriétés sont admises.

c) Les formes indéterminées :

Les cas des formes indéterminées nécessitent une étude particulière. On les retiendra sous la forme :

« $\infty - \infty$ » ; « $0 \times \infty$ » ; « $\frac{\infty}{\infty}$ » et « $\frac{0}{0}$ » mais sans jamais l'inscrire ainsi dans une copie.
Nous étudierons en T.D des méthodes pour lever les indéterminations (factorisation, multiplication par la quantité conjuguée, …)

d) limite d'une fonction polynomiale ou rationnelle :

La limite en l'infini d'une fonction polynomiale est égale à la limite du monôme de plus haut degré.
Le limite en l'infini d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Démonstration : Il suffit de factoriser le polynôme par son monôme de plus haut degré (à faire en exercice)

4) Limites et ordre :

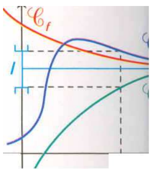
a) Limite finie : théorème des « gendarmes »

Théorème :

f, g, h sont des fonctions et ℓ est un réel.
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \ell$ et si pour x assez grand $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$
alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$

Démonstration : **R.O.C**
Soit $\varepsilon > 0$.
Il existe un réel M_1, tel que, si $x \geq M_1$, $L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$
De même, il existe un réel M_2, tel que, si $x \geq M_2$, $L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$
Soit M le plus grand des réels M_1 et M_2 .
Ainsi pour tout $x \geq M$, on a $L - \varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < L + \varepsilon$ et donc $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$
Ce résultat est vrai pour tout $\varepsilon > 0$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$

Remarque :
Le théorème s'étend aux cas de limites en $-\infty$ et en un réel.



Exemple : Soit $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$, pour $x \neq 0$. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Pour toux $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $-1 \leq \cos x \leq 1$, donc $-\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{\cos x}{x} \leq \dfrac{1}{x}$.

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} (-\dfrac{1}{x}) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

D'après le théorème des gendarmes, on déduit que : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

b) Limites infinies : théorème de comparaison :

Théorème :

f et g sont deux fonctions et a désigne un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

i) Si pour tout réel x voisin de a, $f(x) \geq g(x)$ et que $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$

ii) Si pour tout réel x voisin de a, $f(x) \leq g(x)$ et que $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

Démonstration : **R.O.C**

Soit M > 0.

Comme $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, Il existe donc un réel m tel que, si $x > m$, alors $g(x) > \text{M}$.

Or $g(x) \leq f(x)$. On en déduit que, si $x > m$, alors $f(x) > \text{M}$.

Ce résultat est vrai pour tout M . Donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Le deuxième résultat se démontre de la même façon.

Exemple : Soit $f(x) = x - \sin x$. Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

Pour toux $x \in \mathbb{R}$, on a : $-1 \leq -\sin x$, donc $x - 1 \leq x - \sin x$

Or $\lim_{x \to +\infty} (x - 1) = +\infty$. On en déduit que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

5°) Limites et composition :

a) Limite d'une fonction composée :

Théorème : (admis)

a, b et c désignent des nombres réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Si f et g sont des fonctions telles que $\lim_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim_{x \to b} g(x) = c$ alors $\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = c$

Exemple :

Soit $f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x + 5}$. Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

Posons $\text{X} = 2x^2 - 3x + 5$. On a alors $f(x) = \sqrt{\text{X}}$

$\lim_{x \to +\infty} \text{X} = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\text{X}} = +\infty$. On en déduit que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) Limite d'une composée d'une suite et d'une fonction :

Théorème : (admis)

a et b désignent des nombres réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.
f est une fonction définie sur un intervalle I et (u_n) et (v_n) deux suites telles que pour tout entier naturel n, $u_n \in I$ et $v_n = f(u_n)$.
Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = b$

Exemple :

v est la suite définie sur ℕ* par $v_n = \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)$.Pour étudier la limite de v, on écrit $v_n = f(u_n)$ avec

$u_n = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}$ et $f(x) = \sin x$

On obtient $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{4}$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Donc, d'après la propriété ci -dessus $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{\sqrt{2}}{2}$

II. Continuité d'une fonction

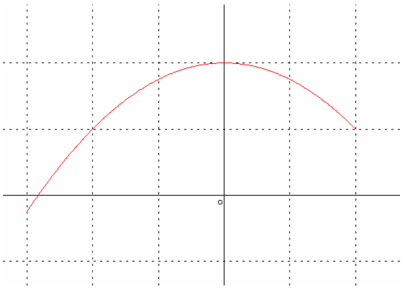
1) Notion de continuité d'une fonction :

a) Définition :

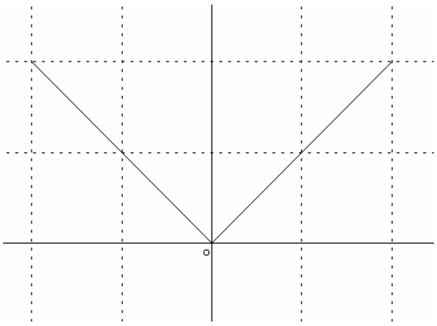
f est une fonction définie sur un intervalle I et a est un réel de I.
- *Dire que f est continue en a signifie que f admet une limite en a égale à f (a).*
- *Dire que f est continue sur I signifie que f est continue en tout réel de I.*

Interprétation graphique :
Dire que *f* est continue sur I signifie que l' on peut tracer la courbe représentative de *f* sur l'intervalle I sans avoir à lever le crayon.

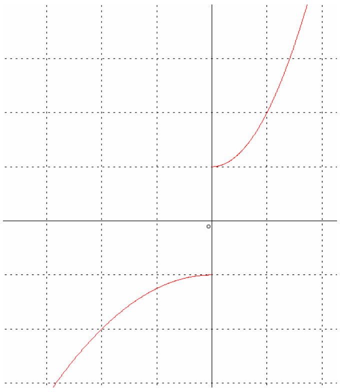
Exemples:



f est continue sur [-3 ; 2]



g est continue sur [-2 ; 2]



h n'est pas continue en 0, donc elle n'est pas continue sur [-3 ; 2].

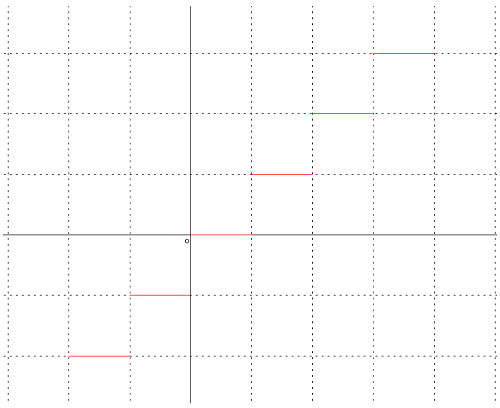
b) La fonction partie entière :

Définition:

*La fonction partie entière est la fonction définie sur **R**, qui , à tout réel x, associe l'unique entier relatif n tel que $n \leq x < n+1$. On note E cette fonction.*

Exemples: E (5,7) = 5 car $5 \leq 5,7 < 6$; E (3) = 3 ; E (-2,6) = -3 car $-3 \leq -2,6 < -2$.

Représentation graphique:



La fonction partie entière n'est pas continue sur $\mathbb{R}$, elle est discontinue en tous les entiers relatifs.

c) Continuité des fonctions usuelles :

Propriétés (admises):

- *Les fonctions polynômes, sinus et cosinus sont continues sur* $\mathbb{R}$.
- *La fonction racine carrée est continue sur* $[0;+\infty[$.
- *Les fonctions construites par opérations ou par composition à partir des fonctions précédentes sont continues sur les intervalles qui forment leur ensemble de définition, c'est le cas en particulier des fonctions rationnelles.*
- *Si une suite* (u_n) *converge vers une limite l et si f est continue sur un intervalle contenant l alors la suite* $(f(u_n))$ *converge vers* $f(l)$.
- *Cas des suites récurrentes: Si une suite u définie par la donnée de son premier terme et pour tout entier n,* $u_{n+1}=f(u_n)$ *converge vers le réel l et si f est continue en l, alors* $f(l) = l$.

Exemple: Soit la suite u avec $u_0 = 1$ et pour tout n, $u_{n+1}= \sqrt{u_n + 1}$, on peut prouver par récurrence que u est croissante et majorée par 2.
Donc u a une limite l (positive)
La fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x+1}$, est continue en l car elle est continue sur $[-1 ; +\infty[$ et $l>0$.
Donc l st une solution positive de l'équation: $x = \sqrt{x+1}$, on trouve $l = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2) Théorème des valeurs intermédiaires :

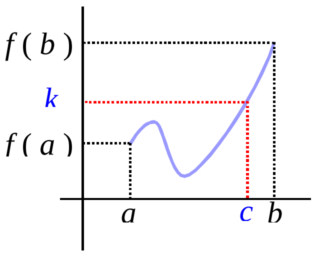
a) Enoncé du théorème :

Théorème (admis pour l'instant et sera démontré à l'aide de suites adjacentes):

f est une fonction continue sur un intervalle [a ; b] .
Pour tout réel k compris entre f (a) et f (b) , il existe au moins un réel c de [a ; b] tel que f (c) = k.

Remarque:

C'est-à-dire si f est continue sur [a ; b], alors $f(x)$ prend au moins une fois toute valeur intermédiaire comprise entre $f(a)$ et $f(b)$:



b) Interprétation graphique :

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, la droite Δ d'équation $y = k$ coupe au moins une fois la courbe C en un point d'abscisse c comprise entre a et b.

c) Interprétation en terme d'équation :

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution c comprise entre a et b.

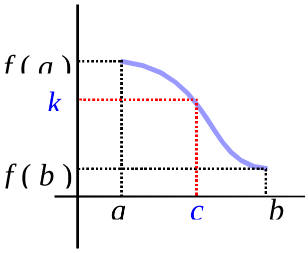
Remarque:

Le théorème des valeurs intermédiaires permet de prouver l'existence d'au moins une solution d'une équation, mais il ne donne pas les solutions ni leur nombre.

d) Cas des fonctions strictement monotones :

Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires: « théorème de la bijection »

Si f est une fonction strictement monotone sur [a ; b], alors pour tout réel k compris entre f (a) et f (b) , l'équation f (x) = k admet une solution unique dans a ; b].



Démonstration : **R.O.C**

La fonction f étant définie et continue sur $[a ; b]$, le théorème des valeurs intermédiaires peut s'appliquer et justifie l'existence d'au moins un réel c dans $[a ; b]$ tel que $f(c) = k$.

Supposons que f est strictement croissante sur $[a ; b]$.

Soit $x \in [a ; b]$:

- si $x > c$, on a $f(x) > f(c)$ donc $f(x) > k$, donc $f(x) \neq k$
- si $x < c$, on a $f(x) < f(c)$ donc $f(x) < k$, donc $f(x) \neq k$

Donc pour tout $x \neq c$, on a $f(x) \neq k$

L'équation $f(x) = k$ a donc c pour unique solution dans $[a ; b]$.

On raisonne de même dans le cas où f est strictement décroissante sur $[a ; b]$.

e) Tableaux de variation :

CONVENTION: Dans un tableau de variation, une flèche vers le haut (vers le bas) signifie que la fonction est continue et strictement croissante (décroissante).

On pourra donc visualiser le nombre de solutions d'une équation $f(x) = k$ sur un tableau de variation.

f) <u>Extension du corollaire :</u>

<u>Corollaire (admis)</u> :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I; λ et μ les limites de f aux bornes de I ; λ et μ désignant des réels ou $-\infty$ ou $+\infty$, alors pour tout réel k strictement compris entre λ et μ, l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique dans I.

<u>Exemple :</u>

f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variation est :

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

1) Déterminer le nombre de solution de $f(x) = -2$.
2) Déterminer le nombre de solution de $f(x) = -4$.
3) Déterminer le nombre de solution de $f(x) = 2$