Chapitre GP4 : Probabilités (2) : Conditionnement - Indépendance

Durée : 3 semaines	Séquence II
Démonstrations : 2	Tice : 1

Objectifs du chapitre :

Après avoir introduit en classe de seconde la nature du questionnement statistique à partir de travaux sur la fluctuation d'échantillonnage, on poursuit ici la présentation entreprise en première des concepts fondamentaux de probabilité dans le cas fini avec la notion de conditionnement et d'indépendance et l'étude de quelques lois de probabilité.
On vise aussi, en complément à l'usage des simulations introduit dès la seconde, une première sensibilisation à d'autres classes de problèmes, notamment celui de l'adéquation d'une loi de probabilité à des données expérimentales.

Points du programme visés :

Contenus	Modalités de mise en oeuvre	Commentaires
Conditionnement par un événement de probabilité non nulle puis indépendance de deux événements. Indépendance de deux variables aléatoires.	On justifiera la définition de la probabilité de B sachant A, notée $P_A(B)$, par des calculs fréquentiels. On utilisera à bon escient les représentations telles que tableaux, arbres, diagrammes…. efficaces pour résoudre des problèmes de probabilités.	Un arbre de probabilité correctement construit constitue une preuve.
Formule des probabilités totales.	Application à la problématique des tests de dépistage en médecine et à la loi de l'équilibre génétique lors d'appariements au hasard.	Les élèves doivent savoir appliquer sans aide la formule des probabilités totales dans des cas simples
Statistique et modélisation Expériences indépendantes. Cas de la répétition d'expériences identiques et indépendantes.	Application aux expériences de références vues en seconde et première (dés, pièces, urnes…).	On conviendra, en conformité avec l'intuition, que pour des expériences indépendantes, la probabilité de la liste des résultats est le produit des probabilités de chaque résultat.

I. Probabilités conditionnelles

1°) Acticité :

Un lycée comporte 3 classes de 1èreS : 1S1,1S2 et 1S3. Le tableau suivant indique l'effectif des classes ainsi que le taux de passage en Terminale S :

	1S1	1S2	1S3
Effectifs	24	32	35
Taux de passage en TS	95%	85%	78%

1°) Quelle est la fréquence des élèves qui passent en Terminale S ?
2°) L'élève n'était pas en 1S3. Quelle est la fréquence qu'il passe en Terminale ?
3°) L'élève ne passe pas en Terminale S. Quelle est la fréquence qu'il soit en 1S3 ?

Dans la suite, on désinge par *p* une probabilité définie sur un univers Ω.

2°) Définition :

Soit A et B deux évènements de Ω tels que $p(B)\neq 0$. On appelle probabilité de A sachant que B est réalisé, le nombre réel noté $p_B(A)$ tel que :

$$p_B(A)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$$

3°) Exemple :

Un lycée a présenté 356 candidats au bac, dont 96 en série S. 256 élèves ont été admis à l'examen ; parmi eux 64 provenaient de la série S. Un élève étant choisi au hasard parmi les candidats présentés par le lycée, on note A l'événement : « l'élève provient de la série S » et B l'événement : « l'élève a été reçu au bac ».
Chaque élève a la même chance d'être choisi ; par équiprobabilité, on a donc :
$p(A)=\frac{96}{356}$, $p(B)=\frac{256}{356}$ et $p(A\cap B)=\frac{64}{356}$

On en déduit que $p_B(A)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=\frac{64}{256}=\frac{1}{4}=0,25$

La probabilité que l'élève provienne de la série S **sachant qu'il est reçu au bac**, est donc égale à 0,25.

On a aussi $p_A(B)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}=\frac{64}{96}=\frac{2}{3}$

Ainsi la probabilité que l'élève soit reçu au bac **sachant qu'il provient de la série S** est $\frac{2}{3}$.

Remarque : En général : $p_A(B)\neq p_B(A)$

4°) Propriétés :

$p_B(B)=1$; $p_B(\varnothing)=0$; $p_B(\overline{A})=1-p_B(A)$

Démonstration :

- $p_B(B)=\dfrac{p(B\cap B)}{p(B)}=\dfrac{p(B)}{p(B)}=1$
- $p_B(\varnothing)=\dfrac{p(B\cap\varnothing)}{p(B)}=\dfrac{p(\varnothing)}{p(B)}=0$
- $p_B(\overline{A})+p_B(A)=\dfrac{p(B\cap\overline{A})}{p(B)}+\dfrac{p(B\cap A)}{p(B)}=\dfrac{p(B\cap\overline{A})+p(B\cap A)}{p(B)}$

Or, $B\cap\overline{A}$ et $B\cap A$ sont des évènements incompatibles et $(B\cap\overline{A})\cup(B\cap A)=B$, donc

$p(B\cap\overline{A})+p(B\cap A)=p(B)$

D'où : $p_B(\overline{A})+p_B(A)=\dfrac{p(B)}{p(B)}=1$

Remarque :

Il ne faut pas confondre $p(A\cap B)$ et $p_B(A)$:
On chosit au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. On considère les évènements :
A : « la carte est un carreau » et B : « la carte est un as »

$p(A\cap B)=\dfrac{1}{32}$ (il y a qu'un seul as de carreau) et $p_A(B)=\dfrac{1}{8}$ (il y a 8 carreaux dont un as)

5) Probabilité d'une intersection d'évènements :

a) Propriété :

Soient A et B deux événements tels que $p(A)\neq 0$ et $p(B)\neq 0$. *On a :*

$p(A\cap B)=p(A)\times p_A(B)$ et $p(A\cap B)=p(B)\times p_B(A)$

b) Exemple :

Une urne contient trois boules bleues et cinq rouges, indiscernables au toucher.
On tire au hasard une première boule de l'urne. Si elle est bleue, on la remet dans 1'ume et on rajoute une autre boule bleue ; si elle est rouge, on ne la remet pas dans l'urne. On tire ensuite, au hasard, une seconde boule de l'urne.
On s'intéresse à la probabilité pour que les deux boules extraites soient bleues.
B_1 est l'événement : « la première boule extraite est bleue » ; B_2 est l'événement : « la seconde boule extraite est bleue ».
L'événement « les deux boules extraites sont bleues » est alors $B_1\cap B_2$.
On a $p(B_1\cap B_2)=p(B_1)\times p_{B_1}(B_2)$

Les boules ont la même chance d'être tirées ; par équiprobabilité, on a donc : $p(B_1)=\dfrac{3}{8}$

B $_1$ étant réalisé, on rajoute une boule bleue, si bien qu'au moment du second tirage il y a 4 boules bleues sur 9 boules dans l'urne. Ce qui permet d'écrire $p_{B_1}(B_2)=\dfrac{4}{9}$

On en déduit : $p(B_1\cap B_2)=\dfrac{4}{9}\times\dfrac{3}{8}=\dfrac{1}{6}$.

La probabilité que les deux boules extraites soient bleues est donc égale à $\dfrac{1}{6}$.

6) Formule des probabilités totales :

Ω est l'univers des événements élémentaires d'une expérience aléatoire. A1 , A2 , … , An désignent des événements de Ω .

a) Définition : (partition de l'univers)

*Dire que les évènements A1 , A2 , … , An forment **une partition** de l'univers Ω , signifie que*

- *les événements A1 , A2 , … , An sont deux à deux disjoints*
- *A1 ∪A2 ∪… ∪An = Ω*

b) Exemple :

Pour tout évènement A de l'univers Ω , $\{A;\overline{A}\}$ est une partition de Ω.

c) Propriété : (formules des probabilités totales)

Soit $\{A_1;A_2;...A_n\}$ une partition de l'univers Ω. Pour tout évènement B inclus dans Ω. :

$$p(B)=\sum_{i=1}^{n} p(B\cap A_i)=\sum_{i=1}^{n} p(A_i)\times p_{A_i}(B)$$

Preuve :

$\forall B\subset\Omega,\ B=\bigcup_{i=1}^{n} B\cap A_i$ et comme $\{A_1;A_2;...A_n\}$ est une partition de l'univers Ω, les évènements $B\cap A_i$ sont disjoints. Ainsi : $p(B)=\sum_{i=1}^{n} p(B\cap A_i)$

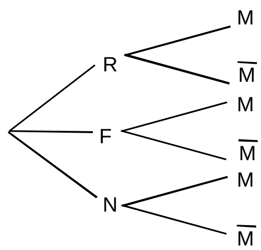
Or $\forall i\in[\![1;n]\!]$: $p(B\cap A_i)=p(A_i)\times p_{A_i}(B)$; d'où $p(B)=\sum_{i=1}^{n} p(A_i)\times p_{A_i}(B)$

Remarque :

La deuxième formule permet de calculer la probabilité d'un événement B dans le cas (fréquent) où l'on connaît les probabilités p (Ai) d'une famille d'événements Ai constituant une partition de l'univers Ω, ainsi que les probabilités conditionnelles de l'événement B par rapport à chaque événement Ai .

c) Application :

Un test d'une maladie est effectué sur la totalité d'une population.
Une étude statistique établit que 70 % de la population réagit négativement au test (événement N) , 20 % réagit faiblement au test (événement F) et 10 % réagit fortement au test (événement R) .
La probabilité pour une personne de cette population d'être atteinte de la maladie (événement M) est :



- 0,9 lorsque le test est fortement positif
- 0,6 lorsque le test est faiblement positif
- 0,05 lorsque le test est négatif

Par hypothèse, on a donc :

$p(R) = 0{,}1$, $p(F) = 0{,}2$, $p(N) = 0{,}7$, $p_R(M) = 0{,}9$, $p_F(M) = 0{,}6$ et $p_N(M) = 0{,}05$

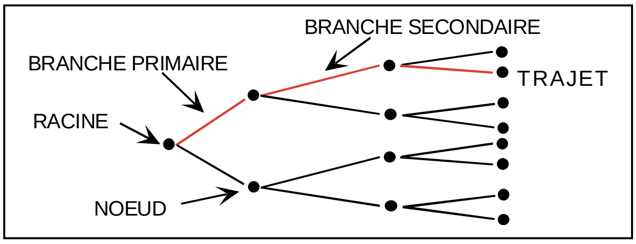
Les événements *R*, *F* et *N* forment une partition de la population.

A l'aide de la formule des probabilités totales, on en déduit que :
$p(M) = p(R) \times p_R(M) + p(F) \times p_F(M) + p(N) \times p_N(M)$
La probabilité pour qu'une personne de cette population soit atteinte de la maladie est donc égale à 0,245

7) Arbre pondérés :

Pour déterminer des probabilités, on peut être amené à construire des arbres dont les branches sont affectées de probabilités.

- Un arbre pondéré se construit et se lit de gauche à droite.
- L'origine de l'arbre est la **racine** de l'arbre.
- Les traits partant de la racine sont appelés **branches primaires** de l'arbre. Elles mènent à des **nœuds**.
- Les branches joignant deux nœuds sont dites **secondaires.**
- Tout chemin menant de la racine à un nœud est appelé **trajet.**



a) Régles de construction :

• Les événements qui se trouvent aux extrémités des branches primaires forment une **partition** de l'univers Ω .

• Le **poids** d'une branche primaire est la **probabilité** de l'événement qui se trouve à son extrémité.

• Le poids d'une branche secondaire est la **probabilité conditionnelle** de l'événement qui se trouve à son extrémité sachant que le trajet menant à son origine a été réalisé.

• Le poids ou la probabilité d'un trajet est le **produit** des poids des branches le constituant.

• La probabilité d'un événement associé à plusieurs trajets complets est la **somme** des probabilités de ces trajets

Remarques :

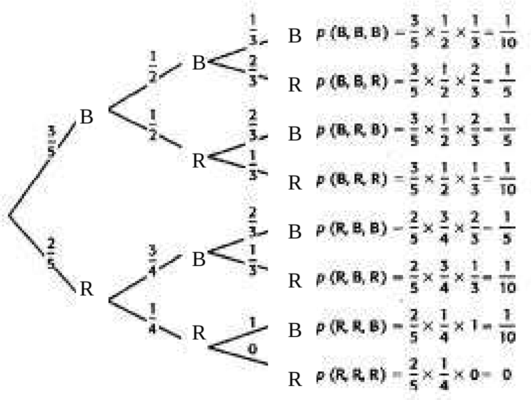
• La somme des poids des branches primaires vaut 1.
• La somme des poids des branches secondaires issues d'un même nœud vaut 1.

b) Exemple :

Une urne contient trois boules bleues et deux boules rouges. On tire successivement et sans remise trois boules de l'urne. L'expérience aléatoire peut être décrite par l'arbre pondéré suivant :

- La probabilité que la troisième boule soit rouge sachant que les deux premières étaient bleues est $\frac{2}{3}$
- La probabilité de l'événement (B , B , B) est $\frac{1}{10}$
- Soit A l'événement : « tirer une seule boule rouge » .
  A est associé aux trajets (R , B , B) , (B , R , B) et (B , B , R) . On a :

$$p(\mathrm{A}) = p(\mathrm{R},\mathrm{B},\mathrm{B}) + p(\mathrm{B},\mathrm{R},\mathrm{B}) + p(\mathrm{B},\mathrm{B},\mathrm{R}) = \frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$$



II. Indépendance

1°) Evènements indépendants (en probabilité) :

La notion d'indépendance en probabilité est importante. Par exemple, lorsqu'on s'intéresse à la probabilité de gagner 5 bons numéros et le numéro chance au LOTO (nouvelles règles depuis le 5 octobre 2008), les numéros tirés dans la première urne contenant 49 numéros n'infue pas sur le numéro tiré dans la deuxième contentant 10 numéros. Nous utiliserons ce résultat lorsque nous calculerons cette probabilité (après avoir traité GP 6 : combinatoire)

a) Activité :

Première Partie :

➊ Une enquête est menée, au début du premier trimestre auprès des 32 élèves d'une classe de Terminale S d'un Lycée concernant leur pratique d'un sport et celle de la musique :
15 élèves pratiquent uniquement un sport, 5 élèves pratiquent uniquement la musique, 4 élèves pratiquent les deux et le reste ne pratique ni l'un ni l'autre. On désigne un élève au hasard de la classe.
On note A l'évènement « l'élève pratique le sport » et B l'évènement « l'élève pratique la musique » .
Calculer $p(A)$, $p(B)$, $p(A\cap B)$ $p_B(A)$ et $p_A(B)$.
Que peut-on dire de la dépendance des évènements A et B ?

❷ On renouvelle l'enquête au cours du 2ème trimestre et :
9 élèves pratiquent uniquement un sport, 5 élèves pratiquent uniquement la musique, 3 élèves pratiquent les deux et le reste ne pratique ni l'un ni l'autre.
Calculer les valeurs de $p(A)$, $p(B)$, $p(A\cap B)$ $p_B(A)$ et $p_A(B)$.
Que peut-on dire ?

b) Définition :

p est une probabilité sur un univers Ω ; A et B étant deux évènements de probabilité non nulle. On dit que A et B sont indépendants (au sens des probabilités) lorsque $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$
(la réalisation de l'un n'influence pas la réalisation de l'autre)

Remarques :

- L'indépendance causale implique l'indépendance stochastique mais la réciproque est fausse.
- Lorsqu'il n'y a pas de d'indépendance causale avérée entre deux évènements , l'indépendance stochastique résulte d'une coïncidence numérique.

Reprenons l'activité :

Deuxième partie :

❶ Proposer une autre distribution des effectifs telle que *A* et *B* soient indépendants.

1°)

	A	NON A	TOTAL
B	4	12	16
NON B	4	12	16
TOTAL	8	24	32

2°)

	A	NON A	TOTAL
B	1	3	4
NON B	7	21	28
TOTAL	8	24	32

❷ On note *a* l'affectif de *A*, *b* celui de *B* , *m* celui de $A\cap B$ et *T* celui de Ω. Quelle relation doivent vérifier les nombres *a*, *b*, *m* et *T* pour que les évènements *A* et *B* soient indépendants ?
Est-ce une condition nécessaire et suffisante ?

c) Application :

Une urne contient quatre boules bleues numérotées b_1 , b_1 , b_2 et b_3 , et six boules rouges numérotées r_1 , r_1 , r_1 , r_2 , r_3 et r_4 .
On suppose toutes ces boules indiscernables au toucher, et on en tire une au hasard.
On considère les événements :
B : « la boule tirée est bleue » ; *R* : « la boule tirée est rouge » ; *N4* : « la boule tirée porte le numéro 4 » ; *N1* : « la boule tirée porte le numéro 1 ».
Les boules ont la même chance d'être tirées ; par équiprobabilité, on a donc :
$p\,(\,N1\,) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$; $p\,(\,B\,) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ et $p\,(\,B \cap N1\,) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$
On a : $p\,(\,B \cap N1) = p\,(\,B\,) \times p\,(\,N1\,)$
Les événements *B* et *N1* sont donc indépendants. Ce résultat s'explique en remarquant que la proportion des boules bleues portant le numéro 1 parmi les boules portant le numéro 1 est la même que celle des boules bleues parmi les boules de l'urne.
On a aussi $p(\,N4\,) = \frac{1}{10}$, $p\,(\,B\,) = \frac{2}{5}$ et $p(\,N4 \cap B\,) = 0$
On a : $p(\,B \cap N4\,) \neq p\,(\,B\,) \times p\,(\,N4\,)$
Les événements *B* et *N4* ne sont donc pas indépendants.

d) Propriété :

A et B étant deux évènements de probabilité non nulle. Les 3 assertions suivantes sont équivalentes :
i) $p\left(A \cap B\right) = p\left(A\right) \times p\left(B\right)$
ii) $p_B\left(A\right) = p\left(A\right)$
iii) $p_A\left(B\right) = p\left(B\right)$

Preuve :

Pour *A* et *B* que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$. On a :
$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$ et $p(A \cap B) = p(B) \times p_B(A)$
donc $p\left(A \cap B\right) = p\left(A\right) \times p\left(B\right) \Leftrightarrow p_A(B) = p(B)$ *et*
$p\left(A \cap B\right) = p\left(A\right) \times p\left(B\right) \Leftrightarrow p_B(A) = p(A)$

e) Remarque :

Ne pas confondre événements **incompatibles** et événements **indépendants**.
Deux événements *A* et *B* sont incompatibles si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.
On a alors : $p(A \cap B) = 0 \neq p(A) \times p(B)$ (deux évènements incompatibles ne peuvent pas être indépendants)
Dans l'exemple précédent, les événements *B* et *N1* sont indépendants, mais non incompatibles; les événements *B* et *N4* sont incompatibles (donc dépendants).

f) Proposition :

Si A et B sont deux évènements indépendants, alors $\overline{A}$ et B ; A et $\overline{B}$; $\overline{A}$ et $\overline{B}$ *sont aussi indépendants.*

Preuve : à faire en exercice