Chapitre GP5 : Nombres complexes (3) : Application à la géométrie

Durée : 1 semaine	Séquence III
Démonstrations :	Tice :

Points du programme visés :

Contenus	Modalités de mise en oeuvre	Commentaires
Interprétation géométrique de $z \mapsto z'$ avec $z'=z+b$ ou $z'-w=k(z-w)$ avec k réel non nul, ou $z'-w=e^{i\alpha}(z-w)$.	On utilisera les nombres complexes pour traiter des exemples simples de configurations et résoudre des problèmes faisant intervenir des translations, des rotations, des homothéties.	On exploitera à la fois les possibilités offertes par les nombres complexes et les raisonnements géométriques directs qui réactivent les connaissances antérieures, notamment sur les transformations du plan.

I. Propriétés relatives aux affixes des nombres complexes :

a) Image vectorielle :

Définition :

On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

Au vecteur $\overrightarrow{V}$ *de coordonnées (a ; b) , on peut associer le nombre complexe z = a + bi.*

On dit que z = a + bi est ***l'affixe*** *de* $\overrightarrow{V}$ *ou que* $\overrightarrow{V}$ *est* ***l'image vectorielle*** *de z = a + bi*

Propriété :

- *Si* $\overrightarrow{V}$ *a pour affixe z et* $\overrightarrow{V'}$ *pour affixe z', alors* $\overrightarrow{V}+\overrightarrow{V'}$ *a pour affixe z + z'.*
- *Si k est un réel, alors k* $\overrightarrow{V}$ *a pour affixe k z.*

Preuve :

- Soit $a + bi$ et $a' + b'i$ les formes algébriques de z et z'.

Le vecteur $\overrightarrow{V}$ a pour coordonnées $(a\,;b)$ et le vecteur $\overrightarrow{V'}$ a pour coordonnées $(a'\,;b')$.

On sait alors que le vecteur $\overrightarrow{V}+\overrightarrow{V'}$ a pour coordonnées $(a + a'\,;b + b')$.
Il a donc pour affixe :
$a + a' + (b + b')i = a + a' + bi + b'i = a + bi + a' + b'i = z + z'$.

- Si k est un réel, alors on sait que $k\overrightarrow{V}$ a pour coordonnées $(ka\,;kb)$, donc $k\overrightarrow{V}$ a pour affixe : $ka + kbi = k(a + bi) = k z$.

b) Affixe d'un vecteur :

Propriété :

Si M a pour affixe $z = a + bi$ et si M' a pour affixe $z' = a' + b'i$, avec a, b, a', b' réels, alors :

le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z' - z = (a' - a) + (b' - b)i$

Preuve :
M a pour coordonnées $(a ; b)$ et M' a pour coordonnées $(a' ; b')$. Les résultats vus en 1ère sur les coordonnées permettent d'écrire :

$\overrightarrow{MM'}$ a pour coordonnées $(a' - a ; b' - b)$, donc $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe :
$(a' - a) + (b' - b)\, i = a' - a + b'i - bi = a' + b'i - (a + bi) = z' - z$.

c) Affixe du milieu d'un segment :

Propriété :

Si M a pour affixe $z = a + bi$ et si M' a pour affixe $z' = a' + b'i$, avec a, b, a', b' réels, alors :

le milieu I de [MM'] a pour affixe $z_I = \dfrac{z + z'}{2}$

Preuve :

le milieu I de [MM'] a pour coordonnées $\left(\dfrac{a + a'}{2} ; \dfrac{b + b'}{2}\right)$, donc son affixe est :

$$z_I = \frac{a + a'}{2} + i\,\frac{b + b'}{2} = \frac{a + a' + bi + b'i}{2} = \frac{a + bi + a' + b'i}{2} = \frac{z + z'}{2}$$

d) Affixe du barycentre de points pondérés :

Propriété :

Si M a pour affixe $z = a + bi$ et si M' a pour affixe $z' = a' + b'i$, avec a, b, a', b' réels, alors :

le barycentre G de $(M ; \alpha)$ et $(M' ; \beta)$ a pour affixe $z_G = \dfrac{\alpha z + \beta z'}{\alpha + \beta}$ $(\alpha + \beta \neq 0)$

(Cette formule se généralise au barycentre de n points pondérés)

Preuve :

pour $\alpha + \beta \neq 0$, le barycentre G de $(M ; \alpha)$ et $(M' ; \beta)$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{\alpha a + \beta a'}{\alpha + \beta} ; \dfrac{\alpha b + \beta b'}{\alpha + \beta}\right)$ donc son affixe est :

$$z_G = \frac{\alpha a + \beta a'}{\alpha + \beta} + i\,\frac{\alpha b + \beta b'}{\alpha + \beta} = \frac{\alpha a + \beta a' + \alpha bi + \beta b'i}{\alpha + \beta} = \frac{\alpha a + \alpha bi + \beta a' + \beta b'i}{\alpha + \beta} =$$
$$\frac{\alpha\,(a + bi) + \beta(a' + b'i)}{\alpha + \beta} = \frac{\alpha\, z + \beta\, z'}{\alpha + \beta}$$

II. Propriétés en liaison avec module et argument

1°) Acticité :

On considère A, B, C et D des points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.

1°) Démontrer que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$.

2°) Démontrer que $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est un imaginaire pur .

3°) Prouver que : A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow$ $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$.

2°) Propriété 1 :

Soit A, B, C et D des points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.

- le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$, et on a :

$$AB = |z_B - z_A| \quad \text{et} \quad (\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) \ [2\pi]$$

- $$\frac{CD}{AB} = \left|\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right| \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \ [2\pi]$$

Preuve : **R.O.C**

- On a vu précédemment que $(\vec{u}, \overrightarrow{V}) = \arg z \ [2\pi]$, z étant l'affixe de $\overrightarrow{V}$.

On en déduit donc : $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) \ [2\pi]$

- $\frac{CD}{AB} = \frac{|z_D - z_C|}{|z_B - z_A|} = \left|\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right|$

- On a vu précédemment que $(\overrightarrow{V}, \overrightarrow{V'}) = \arg z' - \arg z \ [2\pi]$, z étant l'affixe de $\overrightarrow{V}$ et z' l'affixe de $\overrightarrow{V'}$.

On en déduit que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \ [2\pi]$.

3°) Propriété 2 :

Soit A, B, C et D des points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.
Les propriétés ci-dessous sont équivalentes :

- $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$
- $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{2} \ [\pi]$
- $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \ [\pi]$
- $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ *est imaginaire pur*

Preuve :

- L'équivalence des quatre premières propriétés est immédiate.
- Les nombres complexes imaginaires purs (non nuls) sont les nombres complexes ayant pour argument $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$ (modulo 2 π), c'est-à-dire $\frac{\pi}{2}$ (modulo π)

4) Propriété 3 :

Soit A, B et C des points distincts d'affixes respectives z_A, z_B, et z_C.
Les propriétés ci-dessous sont équivalentes :

- *A, B et C sont alignés*
- *$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires*
- *$\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$, $k \in \mathbb{R}$*
- *$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$*
- *$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0 \quad [\pi]$*

Preuve :

- L'équivalence des trois premières propriétés est immédiate.
- Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ ayant pour affixe $z_C - z_A$ et le vecteur $\overrightarrow{AB}$ ayant pour affixe $z_B - z_A$, on obtient :

$$\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB} \text{ , } k \in \mathbb{R} \iff z_C - z_A = k\,(z_B - z_A) \text{ , } k \in \mathbb{R} \iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$$

- Les nombres réels (non nuls) sont les nombres complexes ayant pour argument 0 ou π (modulo 2 π), c'est-à-dire 0 (modulo π).

III. Caractérisation d'ensembles de points

1) Equation paramétrique d'un cercle :

a) Activité : TD GP4 Exercice 2 :

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre Ω et de rayon r. Soit $M(z)$ un point du plan complexe.
Démontrer que :

$$M \in \mathcal{C} \iff z = z_\Omega + re^{i\theta} \text{, où } \theta \in \mathbb{R}.$$

(équation paramétrique d'un cercle)

b) Propriété :

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de rayon r et de centre Ω d'affixe $z_\Omega = x_\Omega + i\,y_\Omega$ où x_Ω et y_Ω sont des réels . Soit M un point d'affixe $z = x + i\,y$ où x et y sont des réels.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\iff |z - z_\Omega| = r \\ &\iff z = z_\Omega + r\,e^{i\theta} \quad (\text{où } \theta \in \mathbb{R}) \\ &\iff \begin{cases} x = x_\Omega + r\cos\theta \\ y = y_\Omega + r\sin\theta \end{cases} \quad (\text{où } \theta \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Preuve :

Par définition $M \in C \Leftrightarrow \Omega M = r \Leftrightarrow |z - z_\Omega| = r$

On sait qu'un nombre complexe de module r ($r \neq 0$) s'écrit sous la forme exponentielle $r\,e^{i\theta}$ (où $\theta \in \mathbb{R}$)

On peut donc écrire :

$|z - z_\Omega| = r \Leftrightarrow z - z_\Omega = r\,e^{i\theta}$ (où $\theta \in \mathbb{R}$) $\Leftrightarrow z = z_\Omega + r\,e^{i\theta}$ (où $\theta \in \mathbb{R}$)

En passant aux coordonnées, on obtient :

$M \in C \Leftrightarrow |z - z_\Omega| = r \Leftrightarrow z = z_\Omega + r\,e^{i\theta}$ (où $\theta \in \mathbb{R}$) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_\Omega + r\cos\theta \\ y = y_\Omega + r\sin\theta \end{cases}$ (où $\theta \in \mathbb{R}$)

2) Médiatrice d'un segment :

Propriété :

Soit A et B les points d'affixes z_A et z_B.
L'ensemble Δ des points M d'affixes z tels que $|z - z_A| = |z - z_B|$ est la médiatrice du segment [AB].

Preuve :

$|z - z_A| = MA$ et $|z - z_B| = MB$ donc :
$|z - z_A| = |z - z_B| \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow$ M appartient à la médiatrice de [AB].

3) Ensemble des points M dont les affixes ont le m ême argument :

Propriété :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ et $z \in \mathbb{C}^*$

L'ensemble des points $M(z)$ tels que $\arg(z) = \alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ est une demi-droite d'origine O, privée de O.

Preuve :

On a $\arg(z) = (\vec{u};\overrightarrow{OM}) = \alpha$, donc M appartient à la demi-droite d'origine O qui détermine un angle de mesure α avec l'axe $(O;\vec{u})$. Comme $z \in \mathbb{C}^*$, O n'appartient pas à cette demi-droite.

IV. Ecriture complexe de transformations du plan

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$

1) Translation :

a) Définition :

$\vec{u}$ étant un vecteur et M un point quelconque du plan.
M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

b) Ecriture complexe:

Propriété :

L'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = z + b$ *où b est un nombre complexe fixé, est la translation de vecteur* $\vec{u}$ *d'affixe b.*

Preuve :

Si le point M' a pour affixe $z' = z + b$, alors $z' - z = b$, donc $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

2) Homothétie :

a) Définition :

Ω étant un point du plan et k un nombre réel non nul. M étant un point quelconque du plan M' est l'image de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport k $\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$.

b) Ecriture complexe:

Propriété :

L'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' avec $z' - \omega = k(z - \omega)$ *où k est un nombre réel non nul fixé et ω un nombre complexe fixé, est l'homothétie de centre Ω d'affixe ω et de rapport k.*

Preuve :

Si le point M' a pour affixe z' avec $z' - \omega = k(z - \omega)$, alors $\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$

3) Rotation :

a) Définition :

Ω étant un point du plan et α un nombre réel. M étant un point quelconque.

M' est l'image de M par la rotation de centre Ω et d'angle α $\Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right) = \alpha\,[2\pi] \end{cases}$

b) Ecriture complexe:

Propriété :

L'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' avec $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$ *où α est un nombre réel fixé et ω un nombre complexe fixé, est la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle α.*

Preuve :

Soit M' le point d'affixe z' tel que $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$

- si $z \neq \omega$, on a bien sûr $z' \neq \omega$. On a alors $\dfrac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\alpha}$.

D'où $\left|\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right| = 1$ et $\arg\left(\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \alpha\ [2\pi]$

On en déduit que $\dfrac{\Omega M'}{\Omega M} = 1$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \alpha\ [2\pi]$, c'est-à-dire $\Omega M' = \Omega M$ et

$(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \alpha\ [2\pi]$.

- si $z = \omega$, alors $z' = \omega$. Ω est donc invariant par cette application.

L'application est donc la rotation de centre Ω et d'angle α.