

Correction de l'interrogation écrite de mathématiques n°3

Exercice 1 :

1^{ère} Partie : Restitution Organisée de Connaissances.

Soient a et ℓ deux nombres réels.

1°) Définition de $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists h > 0 \text{ tel que : } \forall x \in]a - h ; a + h[\setminus \{a\}, f(x) \in]\ell - \varepsilon ; \ell + \varepsilon[$$

OU

Tout intervalle ouvert contenant ℓ , contient tous les nombres $f(x)$ pour x suffisamment proche de a .

2°) f, g et h sont telles que pour tout réel x proche de a : $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell.$$

Démontrons que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$:

1^{ère} version :

- $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$, donc $\forall \varepsilon > 0, \exists h_1 > 0$ tel que : $\forall x \in]a - h_1 ; a + h_1[\setminus \{a\}, g(x) \in]\ell - \varepsilon ; \ell + \varepsilon[$

- $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell$, donc $\forall \varepsilon > 0, \exists h_2 > 0$ tel que : $\forall x \in]a - h_2 ; a + h_2[\setminus \{a\}, h(x) \in]\ell - \varepsilon ; \ell + \varepsilon[$

Soit $\varepsilon > 0$, posons $h = \max(h_1; h_2)$, on a :

$$\forall x \in]a - h ; a + h[\setminus \{a\}, g(x) \in]\ell - \varepsilon ; \ell + \varepsilon[\text{ et } h(x) \in]\ell - \varepsilon ; \ell + \varepsilon[.$$

Or, pour tout réel x proche de a : $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, donc :

$$\ell - \varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < \ell + \varepsilon ; \text{ ainsi :}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists h > 0 \text{ tel que : } \forall x \in]a - h ; a + h[\setminus \{a\}, f(x) \in]\ell - \varepsilon ; \ell + \varepsilon[$$

Conclusion :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$$

2^{ème} version :

- $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$, donc tout intervalle ouvert contenant ℓ , contient tous les nombres $g(x)$ pour x suffisamment proche de a .

- $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell$, donc tout intervalle ouvert contenant ℓ , contient tous les nombres $h(x)$ pour x suffisamment proche de a .

Or, pour tout réel x proche de a : $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, donc :

Donc tout intervalle ouvert contenant ℓ , contient tous les nombres $f(x)$ pour x suffisamment proche de a .

Conclusion :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$$

2^{ème} Partie :

Déterminons $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$:

Pour tout réel $x \neq 0$, $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$.

- Pour $x > 0$, $-x \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$, et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} -x = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x = 0$, donc d'après le théorème des

gendarmes : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

- Pour $x < 0$, $x \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq -x$, et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} -x = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} x = 0$, donc d'après le théorème des

gendarmes : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Conclusion :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Exercice 2 :

On considère l'équation (E) $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$.

1°) On pose $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, pour tout réel x .

Déterminons $f'(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

2°) Variations de la fonction f et tableau de variation :

On a :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$3x$	-	0	+	+	
$x-2$	-	-	0	+	
$f'(x)$	+	0	-	0	+

Ainsi :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f	$-\infty$	↗ 1	↘ -3	↗ $+\infty$	

3°) A l'aide de 2°), déterminons le nombre de solutions de l'équation (E) sur l'intervalle $[-1; 4]$:

- Sur $[-1; 0]$:

* La fonction f est continue (fonction polynôme) et strictement croissante.

* $f(-1) = -3$ et $f(0) = 1$, donc $0 \in [f(-1); f(0)]$

D'après le théorème de la bijection l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[-1; 0]$

• Sur $[0; 2]$:

* La fonction f est continue (fonction polynôme) et strictement décroissante.

* $f(2) = -3$ et $f(0) = 1$, donc $0 \in [f(0); f(2)]$

D'après le théorème de la bijection l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[0; 2]$

• Sur $[2; 4]$:

* La fonction f est continue (fonction polynôme) et strictement croissante.

* $f(2) = -3$ et $f(4) = 17$, donc $0 \in [f(2); f(4)]$

D'après le théorème de la bijection l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[2; 4]$

Conclusion :

L'équation (E) admet exactement 3 solutions dans $[-1; 4]$

Exercice 3 :

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On désigne par A, B, C, D les points d'affixes respectives $z_A = 1$, $z_B = i$, $z_C = -1$, $z_D = -i$.

1. L'écriture complexe de la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ est $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - 1) + 1$, donc

$$z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) (z - 1) + 1.$$

$$\text{On en déduit } z_E = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) (-i - 1) + 1 = \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right) (1 - i) \text{ (réponse 2).}$$

2. $|z + i| = |z - 1| \Leftrightarrow |z - z_D| = |z - z_A| \Leftrightarrow DM = AM$ si M est le point d'affixe z . L'ensemble cherché est donc la médiatrice du segment [AD].