Devoir maison n°5 pour le 10 janvier 2012

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}}{2x}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0;\vec{i};\vec{j})$.

1°) **a)** Justifier brièvement que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et montrer que :

$$\forall x\in\ ]0;+\infty[,\ f'(x)=\frac{2x^2-3}{2\sqrt{3}x^2}$$

b) Etudier les variations de f sur $]0;+\infty[$.

c) Déterminer les limites de f aux bornes de $]0;+\infty[$.

En déduire que C admet une asymptote verticale dont-on précisera l'équation.

d) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right)$ et interpréter graphiquement le résultat.

e) Tracer la courbe C.

2°) **a)** Soit m un nombre réel. On note (D) la droite d'équation $y=m$. Montrer que : pour tout réel $m>\sqrt{2}$, C et (D) possèdent deux points d'intersection.

b) On suppose que $m>\sqrt{2}$ et on note A et B les points d'intersection de C et (D).

Soit I le milieu du segment [AB]. Montrer que lorsque m décrit l'intervalle $]\sqrt{2};+\infty[$, I décrit une partie, que l'on précisera, de la droite d'équation $x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}y=0$. Tracer la partie de cette droite sur le même graphique qu'en **1°) e)**.