

Chapitre A4 : Dérivation

Durée : 2 semaines	Séquence III
Démonstrations : 2	Tice : 0

Points du programme visés :

Dérivation		
<p>Rappels sur les règles de dérivation et sur le lien entre signe de la dérivée et variations de la fonction. Application à l'étude de la fonction tangente.</p>	<p>On rappellera en particulier le théorème suivant qui sera utilisé à propos des primitives : une fonction dont la dérivée est nulle sur un intervalle est constante sur cet intervalle. On fera remarquer que toute fonction dérivable est continue. Écriture différentielle $dy=f'(x)dx$.</p>	<p>On se contentera d'expliquer que l'écriture différentielle exprime symboliquement l'égalité : $\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x$ où ε tend vers zéro avec Δx.</p>
<p>Dérivation d'une fonction composée.</p>	<p>Le principe de la démonstration sera indiqué. La notation différentielle est ici un moyen mnémotechnique de retrouver la formule.</p>	<p>À l'occasion des exercices, on rencontre des relations entre grandeurs de la forme $x=f(t)$, $y=g(x)$, $v=u(t)$ etc., où t représente un temps, x et y des longueurs, v une vitesse : dans ces conditions, $f'(t)$ est une vitesse, $g'(x)$ est un nombre et $u'(t)$ une accélération, ce que l'écriture différentielle met en valeur.</p>

I. Nombre dérivé - Fonction dérivée

Dans tout le paragraphe f est une fonction définie sur un intervalle I et on note C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) Définitions

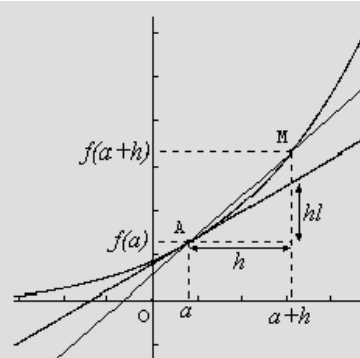
a) Nombre dérivé :

Définition : f est une fonction définie sur un intervalle I et a est un réel de I .

f est dérivable en a si et seulement si l'une ou l'autre des deux propositions équivalentes est réalisée :

- la fonction $h \mapsto \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ a une limite finie l en 0 , ou encore que la fonction $x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ a pour limite l quand x tend vers a .
- pour tout réel h tel que $a+h \in I$, $f(a+h) = f(a) + hl + h\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

Le nombre l est appelé nombre dérivé de la fonction f en a .



Remarques :

- Le nombre $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ ($h \neq 0$) est appelé taux de variation de f entre a et $a+h$.
- Soit $A(a; f(a))$ et $M(a+h; f(a+h))$, $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ ($h \neq 0$) est le coefficient directeur de la droite (AM) .

Le nombre dérivé de f en a est noté $f'(a)$.

Lorsque la fonction f admet un nombre dérivé en a , on dit que f est dérivable en a .

Lorsque f est dérivable en tout point d'un intervalle I inclus dans le domaine de définition de f , on dit que f est dérivable sur I .

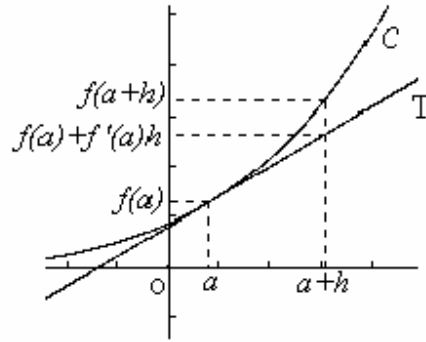
b) Fonction dérivée :

Définition : f est une fonction dérivable sur un intervalle I . La fonction dérivée de f sur I est la fonction f' qui à tout a dans I associe $f'(a)$.

2) Tangente à une courbe :

f est une fonction dérivable sur I et $a \in I$.

- C est la courbe représentative de f dans un repère.
Une équation de la tangente T à C au point A d'abscisse a est :
 $y = f'(a)(x - a) + f(a)$



3) Approximation affine locale :

- Pour tout réel h tel que $a + h \in I$,
 $f(a + h) = f(a) + f'(a)h + h\epsilon(h)$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$
 $f(a) + f'(a)h$ est l'approximation affine de $f(a + h)$ pour h proche de 0, associée à f .

4) Dérivabilité et continuité :

Propriété : f est une fonction définie sur un intervalle I , a est un réel de I .
Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .

Démonstration :

On suppose que f est dérivable en a , c'est à dire, pour $h \neq 0$ tel que $a + h \in I$,
 $f(a + h) = f(a) + f'(a)h + h\epsilon(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$.

Or $\lim_{h \rightarrow 0} f'(a)h = 0$ et $\lim_{h \rightarrow 0} h\epsilon(h) = 0$ donc $\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = f(a)$, ce qui justifie que f est continue en a .

Remarque : la réciproque de la propriété est fautive : la fonction racine carrée est continue en 0, mais elle n'est pas dérivable en 0.

5) Dérivées successives :

Définition : f est une fonction dérivable sur un intervalle I . Sa fonction dérivée f' s'appelle la fonction dérivée première (ou d'ordre 1) de f .

Lorsque f' est dérivable sur I , sa fonction dérivée est notée f'' ; f'' est appelée dérivée seconde (ou dérivée d'ordre 2) de f .

Par itération, pour tout entier naturel $n \geq 2$, on définit la fonction dérivée n -ième (ou d'ordre n) comme étant la fonction dérivée de la fonction d'ordre $n - 1$, $f^{(1)} = f'$ et pour tout $n \geq 2$, $f^{(n)} = f^{(n-1)'}$.

Exemple : $f : x \mapsto \cos x$ est dérivable sur \mathbb{R} et on a $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f^{(3)}(x) = \sin x$, $f^{(4)}(x) = \cos x$ et ainsi de suite...

6) Rappel : Règles de dérivation :

a) Dérivées des fonctions usuelles :

$f(x)$	$f'(x)$	f est dérivable sur l'intervalle
λ	0	$] -\infty; +\infty[$
x	1	$] -\infty; +\infty[$
x^n ($n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$)	nx^{n-1}	$] -\infty; +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$] -\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$] -\infty; +\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$] -\infty; +\infty[$

b) Dérivées : opérations :

Propriété : u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k est un réel. Alors ku , $u + v$ et uv sont dérivables sur I et :

$$(ku)' = ku' ; \quad (u + v)' = u' + v' ; \quad (uv)' = u'v + uv'$$

Si, de plus v ne s'annule pas sur I , alors $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur I et :

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Exercice : Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1. f est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = (x - 1)\sqrt{x}$

2. f est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ par : $f(x) = \frac{4x^2 + x + 2}{x^2 + x}$

Correction :

1. f est dérivable sur $]0; +\infty[$, et $f(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = x - 1$ et $v(x) = \sqrt{x}$

On a alors $u'(x) = 1$; $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $f' = u'v + uv'$

$$f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + (x - 1) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{x - 1}{2\sqrt{x}}$$

2. f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$, et $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 4x^2 + x + 2$ et $v(x) = x^2 + x$

On a alors $u'(x) = 8x + 1$; $v'(x) = 2x + 1$ et $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{(8x + 1)(x^2 + x) - (4x^2 + x + 2)(2x + 1)}{(x^2 + x)^2}.$$

II. Dérivée d'une fonction composée

1) Dérivation d'une fonction composée :

Théorème : g est une fonction dérivable sur un intervalle J . u est une fonction dérivable sur un intervalle I , et pour tout x de I , $u(x)$ appartient à J .

Alors la fonction f définie par $f(x) = g \circ u(x) = g(u(x))$ est dérivable sur I et pour tout x de I ,

$$f'(x) = u'(x) \times g'(u(x)).$$

Démonstration : Pour tout $a \in I$, pour tout réel h non nul tel que $a + h \in I$,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{g(u(a+h)) - g(u(a))}{h} = \frac{g(u(a+h)) - g(u(a))}{u(a+h) - u(a)} \times \frac{u(a+h) - u(a)}{h}$$

Or u est dérivable en a , d'où $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a)$.

De plus, u est dérivable en a , u est donc continue en a , ce qui donne : $\lim_{h \rightarrow 0} u(a+h) = u(a)$.

On a également $u(a) \in J$ et g est dérivable sur J , d'où : $\lim_{X \rightarrow u(a)} \frac{g(X) - g(u(a))}{X - u(a)} = g'(u(a))$.

On obtient alors $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(u(a+h)) - g(u(a))}{u(a+h) - u(a)} = g'(u(a))$. Donc $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = u'(a) \times g'(u(a))$

et $g \circ u$ est dérivable en a et $(g \circ u)'(a) = u'(a) \times g'(u(a))$.

Remarques : Cette démonstration n'est valable que si $u(a+h) - u(a) \neq 0$, ce qui n'est possible pour toutes les fonctions. Par exemple si u est une fonction constante ou la fonction définie par :

$$\begin{cases} u(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{pour } x \neq 0 \\ u(0) = 0 \end{cases}, \text{ la démonstration est mise en défaut.}$$

Dans le cas d'une fonction constante, cela est clair.

Étude du cas :
$$\begin{cases} u(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ pour } x \neq 0 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

• La fonction u est dérivable en 0 car $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ (en utilisant le théorème des gendarmes après avoir encadré $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ par -1 et 1.

• u s'annule indéfiniment au voisinage de 0. En effet : $\forall k \in \mathbb{Z}^*$, $u\left(\frac{1}{k\pi}\right) = 0$ car $\sin(k\pi) = 0$

Or, tout voisinage de 0 contient une infinité de nombres de la forme $\frac{1}{k\pi}$:

On a : $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k\pi} = 0$, donc par définition : $\forall \epsilon > 0, \exists A > 0$ tel que $k > A \Rightarrow \frac{1}{k\pi} \in]-\epsilon; \epsilon[$

Comme il y a une infinité de nombre k tel que $k > A$, voisinage de 0 contient une infinité de nombres de la forme $\frac{1}{k\pi}$;

Ainsi, on ne pourra pas écrire $u(a+h) - u(a)$ au dénominateur !

Exemple : Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. f est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par : $f(x) = \sin \frac{1}{x}$.
2. f est la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \cos(x^2)$.

Solution :

1. f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = g \circ u(x)$ où $u(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \sin x$.
 $u'(x) = -\frac{1}{x^2}$ et $g'(x) = \cos x$. On a alors $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}$.
2. f est dérivable sur \mathbb{R} . Pour tout réel x , $f(x) = g \circ u(x)$ où $u(x) = x^2$ et $g(x) = \cos x$.
 $u'(x) = 2x$ et $g'(x) = -\sin x$ et $f'(x) = -2x \sin(x^2)$.

2) Conséquences :

Propriété : u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I .

Alors la fonction f définie sur I par $f(x) = \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I , et pour tout x de I : $f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

Démonstration : $f(x) = g(u(x))$ où $g(x) = \sqrt{x}$ et $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

g est dérivable sur $]0; +\infty[$; pour tout x de I , $u(x) > 0$, donc la fonction $f = g \circ u$ est dérivable sur I et d'après la propriété sur la dérivée d'une fonction composée, on obtient : $f'(x) = u'(x) \times g'(u(x)) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

Propriété : u est une fonction dérivable sur un intervalle I et n est un entier naturel non nul.

Alors la fonction f définie par $f(x) = [u(x)]^n$ est dérivable sur I et pour tout x de I :

$$f'(x) = n[u(x)]^{n-1} \times u'(x)$$

Démonstration : $f(x) = g(u(x))$ où $g(x) = x^n$. Pour tout réel x , $g'(x) = nx^{n-1}$.

Alors pour tout réel x , $f'(x) = u'(x) \times g'(u(x)) = u'(x) \times n[u(x)]^{n-1} = n[u(x)]^{n-1} \times u'(x)$.

Remarque : Cas où $n < 0$ et u ne s'annule en aucun point de I :

On a $f(x) = [u(x)]^n = \frac{1}{[u(x)]^{-n}}$. Puisque $-n > 0$, on peut appliquer la formule de la dérivée de l'inverse

d'une fonction et on obtient : $f'(x) = -\frac{([u(x)]^{-n})'}{([u(x)]^{-n})^2}$

et $([u(x)]^{-n})' = -nu'(x) \times [u(x)]^{-n-1}$ donc $f'(x) = n \frac{u'(x)[u(x)]^{-n-1}}{[u(x)]^{-2n}} = n \frac{u'(x)}{[u(x)]^{-n+1}}$.

On obtient également $f'(x) = nu'(x)[u(x)]^{n-1}$.

Exercice : Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. f est la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x^2 + 3x + 1)^3$.

2. g est la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$.

Solution :

1. f est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur \mathbb{R} .

On a $f(x) = [u(x)]^n$ où $u(x) = x^2 + 3x + 1$ et $u'(x) = 2x + 3$.

On a alors $f'(x) = 3 \times (2x + 3)(x^2 + 3x + 1)^2$.

2. Comme $x^2 + 2x + 3 > 0$ sur \mathbb{R} , la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} .

On a $g(x) = \sqrt{u(x)}$ où $u(x) = x^2 + 2x + 3$ et $u'(x) = 2x + 2$

On a alors $f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x + 3}} = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$.

III. Rappel : Application à l'étude des variations d'une fonction

1) Variation :

Théorème : f est une fonction dérivable sur un intervalle I .

1. Si pour tout x de I , $f'(x) > 0$ sauf peut-être en quelques points où $f'(x)$ s'annule alors f est strictement croissante sur I .

2. Si pour tout x de I , $f'(x) < 0$ sauf peut-être en quelques points où $f'(x)$ s'annule alors f est strictement décroissante sur I .

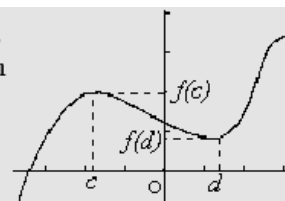
3. Si pour tout x de I , $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I .

1) Extremum local :

Définition : f est une fonction dérivable sur un intervalle I , c est un point de I .

Dire que $f(c)$ est un **maximum local** (resp. **minimum local**) signifie que l'on peut trouver un intervalle J inclus dans I et contenant c , tel que, pour tout x de J , $f(x) \leq f(c)$ (resp. $f(x) \geq f(c)$).

On appelle **extremum local**, un maximum ou un minimum local.



Théorème : f est une fonction dérivable sur un intervalle I ouvert, c est un point de I .

1. Si $f(c)$ est un extremum local, alors $f'(c) = 0$.
2. Si f' s'annule en c en changeant de signe, alors $f(c)$ est un extremum local.

Remarque : Lorsque $f(c)$ est un extremum local, la tangente à la courbe représentant f en $A(c; f(c))$ est horizontale.