

Chapitre A5 : Etude de la fonction exponentielle et de la fonction logarithme népérien

Durée : 2 semaines	Séquence II
Démonstrations : tout	Tice : 1

Points du programme visés :

Contenus	Modalités de mise en oeuvre	Commentaires
Étude des fonctions logarithmes et exponentielles		
Équations différentielles $y' = ay + b$		
	<p>On démontrera l'existence et l'unicité de la solution passant par un point donné.</p> <p>On étudiera quelques problèmes où interviennent des équations différentielles se ramenant à $y' = ay + b$.</p>	<p>Ce paragraphe, déjà abordé lors de l'introduction de la fonction exponentielle, pourra être réparti sur l'ensemble de l'année. On fera le lien avec l'étude de ces équations en physique ; on définira le temps caractéristique $\tau = -1/a$ pour $a < 0$. Les indications utiles pour se ramener à $y' = ay + b$ doivent être données. Des solutions de l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ seront introduites en cours de physique.</p>
Étude des fonctions logarithmes et exponentielles		
Fonction logarithme népérien ; notation \ln . Équation fonctionnelle caractéristique. Dérivée ; comportement asymptotique.	<p>On mentionnera la fonction logarithme décimal, notée \log, pour son utilité dans les autres disciplines et son rapport avec l'écriture décimale des nombres.</p> <p>Approximation affine, au voisinage de 0, de $h \mapsto \ln(1+h)$.</p>	<p>Le mode d'introduction du logarithme n'est pas imposé. On peut, pour l'introduire :</p> <ul style="list-style-type: none"> - soit partir des propriétés des fonctions exponentielles ; - soit poser le problème des fonctions dérivables sur \mathbb{R}^{**} telles que $f(xy) = f(x) + f(y)$ et admettre l'existence de primitives pour la fonction $x \mapsto 1/x$; - soit traiter le logarithme après l'intégration.

I. Etude de la fonction exponentielle

1) Rappels :

- La fonction exponentielle est l'unique fonction dérivable sur \mathbb{R} telle que :
 $\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$. On la note $x \mapsto e^x$ où $e = \exp(1) \approx 2,718$
- $\forall x \in \mathbb{R} : e^x > 0$

2) Continuité :

On a montré dans A4 que toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I.
Donc :

Propriété :

La fonction exponentielle est définie, continue, dérivable sur \mathbb{R}

3) Sens de variation :

On sait que $(e^x)' = e^x$ et on a vu que $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Propriété :

La fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R}

Remarque : La fonction exponentielle croît très rapidement ($e^{50} \approx 5 \times 10^{21}$). Dans le langage courant, on parle souvent de phénomènes à "croissance exponentielle", pour indiquer que la croissance de ces phénomènes est très rapide.

Conséquences:

Pour tous réels a et b :

$$a = b \Leftrightarrow e^a = e^b$$

$$a < b \Leftrightarrow e^a < e^b$$

$$a \leq b \Leftrightarrow e^a \leq e^b$$

$$a > 0 \Leftrightarrow e^a > 1$$

$$a < 0 \Leftrightarrow 0 < e^a < 1$$

3) Limites :

Propriété 1:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

Preuve :

- La fonction exponentielle est strictement croissante, on a donc $e^1 > e^0$ donc $e > 1$.
On en déduit que la suite (e^n) est une suite géométrique de raison e avec $e > 1$. Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$$

Soit $M > 0$.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$, il existe donc n_0 tel que si $n > n_0$, $e^n > M$

Or la fonction exponentielle est croissante sur \mathbb{R} . Ainsi, si $x > n > n_0$ on a $e^x > e^n > M$

Ce résultat est vrai pour tout $M > 0$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

Tableau de variations :

x	$-\infty$	$+\infty$
exp	0	$+\infty$

Propriété 2:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- e^x a pour approximation affine $1 + x$ au voisinage de 0
- Pour tout réel x , on a $e^x \geq 1 + x$

Preuve :

- On sait que $(e^x)' = e^x$. Le nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0 est donc $e^0 = 1$

Par définition du nombre dérivé, on peut donc écrire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

- Pour une fonction f dérivable en x_0 , l'approximation affine est :

$$f(x_0 + h) \text{ est } f(x_0) + f'(x_0) \times h$$

L'approximation affine de e^h est donc $e^0 + e^0 \times h = 1 + h$.

L'approximation affine de e^x est donc $1 + x$.

Cela revient à dire que la courbe de la fonction exponentielle a pour tangente au point d'abscisse 0 la droite d'équation $y = x + 1$

- Pour démontrer que $e^x \geq 1 + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, considérons la fonction h définie par : $h(x) = e^x - x - 1$

h est la somme de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} , h est donc dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x , on a $h'(x) = e^x - 1$

Si $x \leq 0$, on a : $e^x \leq 1 \Leftrightarrow e^x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow h'(x) \leq 0$

Donc h est décroissante sur $] -\infty ; 0]$.

Si $x \geq 0$, on a : $e^x \geq 1 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow h'(x) \geq 0$

Donc h est croissante sur $[0 ; +\infty [$.

On en déduit que si $x \leq 0$, on a $h(x) \geq h(0)$ et si $x \geq 0$, on a $h(x) \geq h(0)$

D'autre part $h(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$. Ainsi, pour tout réel x , on a :

$$h(x) \geq h(0) \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 + x$$

Propriété 3:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

Preuve :

• On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $e^x \geq 1 + x$, on a donc en particulier $e^x \geq x$

En appliquant cette relation à $\frac{x}{2}$, on obtient $e^{\frac{x}{2}} \geq \frac{x}{2}$

Puis en élevant au carré (les deux membres sont positifs), on obtient :

$$\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 \geq \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow e^{2 \cdot \frac{x}{2}} \geq \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow e^x \geq \frac{x^2}{4}$$

Ainsi pour tout réel $x > 0$, on a $\frac{e^x}{x} \geq \frac{x}{4}$

On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

• Sachant que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, on peut en déduire que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{-x} = +\infty$ c'est-à-dire

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x e^x} = +\infty$$

donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x e^x = 0^+$ et par conséquent $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0^-$.

Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$

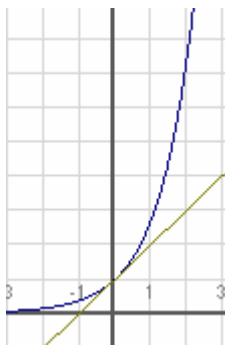
4) Représentation graphique :

• On a vu que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

La courbe a pour asymptote horizontale l'axe (Ox) quand x tend vers $-\infty$

• On a vu que e^x a pour approximation affine $1 + x$ au voisinage de 0 et que pour tout réel x , on a $e^x \geq 1 + x$

La courbe a pour tangente au point d'abscisse 0 la droite T d'équation $y = x + 1$ et la courbe se trouve au-dessus de T.



II. Etude de la fonction ln

1) Rappel :

La fonction exponentielle est une bijection de \mathbb{R} sur $]0; +\infty[$.

C'est-à-dire que pour tout $b \in]0; +\infty[$, il existe un unique réel a tel que $e^a = b$.

On note $a = \ln b$, ce qui se lit logarithme népérien de b . Ainsi à tout réel x strictement positif, on peut associer un unique réel noté $\ln(x)$.

2) Définition :

On appelle **fonction logarithme népérien** la fonction qui à tout réel x strictement positif, fait correspondre le réel y noté $\ln(x)$ dont l'exponentielle est égale à x :

$$\begin{array}{l} \ln :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln x \end{array}$$

Remarques :

La fonction \ln est une bijection de $]0; +\infty[$ dans \mathbb{R} .

L'équivalence $\begin{cases} x \in \mathbb{R}_+^* \\ y = \ln x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \mathbb{R} \\ e^y = x \end{cases}$ traduit le fait que les fonctions exponentielle et logarithme népérien sont réciproques l'une de l'autre

3) Conséquences :

- Pour tout réel x strictement positif, on a $e^{\ln x} = x$
- Pour tout réel x , on a $\ln e^x = x$
- $\ln 1 = 0$
- $\ln e = 1$

4) Sens de variation :

Propriété

La fonction \ln est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* .

Preuve :

Soit a et b deux réels strictement positifs tels que $a < b$.

Supposons que $\ln a \geq \ln b$

La fonction exponentielle étant croissante on aurait $e^{\ln a} \geq e^{\ln b}$ donc $a \geq b$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

On ne peut donc pas avoir $\ln a \geq \ln b$.

On a donc $\ln a < \ln b$.

On en déduit que la fonction \ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Conséquences :

Pour tous réels strictement positifs a et b

- $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
- $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$
- $\ln a \leq \ln b \Leftrightarrow a \leq b$
- $a > 1 \Leftrightarrow \ln a > 0$
- si $0 < a < 1$ alors $\ln a < 0$

5) Continuité et dérivabilité :

Propriété

La fonction \ln est continue et dérivable sur \mathbb{R}_+^* et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\ln' x = \frac{1}{x}$

Preuve :

Lemme

Pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\ln(x) \leq x - 1$

Démonstration du lemme :

S'il existait un réel $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\ln(x) > x - 1$

Alors, par stricte croissance de l'exponentielle, on aurait :

$$x > e^{x-1}$$

C'est-à-dire, en posant $u = x - 1$: $1 + u > e^u$

Ce que contredirait l'inégalité $e^u \geq u + 1$, valable pour tout $u \in \mathbb{R}$ (voir exercice en 1.1.)

D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\ln(x) \leq x - 1$

Premier pas : on montre que la fonction logarithme est continue en 1. Il suffit pour cela, de montrer qu'elle admet une limite finie (égale à $\ln 1 = 0$). Distinguons deux cas.

Limite à droite

Pour tout $x \in]1, +\infty[$, le lemme permet d'écrire : $0 < \ln(x) \leq x - 1$

Et d'après le théorème des gendarmes : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x) = 0$

Limite à gauche

Pour tout $x \in]0, 1[$, on a : $\ln(x) < 0$

Mais d'après les propriétés du logarithme, on obtient :

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) > 0$$

Et d'après le lemme, on peut écrire : $0 < \ln\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} - 1$

Et d'après le théorème des gendarmes : $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(x) = 0$

Les limites à droite et à gauche sont égales à $\ln(1)$, ce qui prouve la continuité du logarithme en 1.

Deuxième pas : on montre que la fonction logarithme est continue sur \mathbb{R}_+^* .

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $h > -a$: $\ln(a+h) = \ln\left[a\left(1+\frac{h}{a}\right)\right] = \ln(a) + \ln\left(1+\frac{h}{a}\right)$

Comme la fonction \ln est continue en 1 : $\lim_{h \rightarrow 0} \ln\left(1+\frac{h}{a}\right) = \ln(1) = 0$

D'où : $\lim_{h \rightarrow 0} \ln(a+h) = \ln(a)$

Ce qui prouve la continuité de la fonction \ln en a .

Donc la fonction \ln est continue sur \mathbb{R}_+^* .

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. Étudions la limite, lorsque h tend vers 0, de l'accroissement moyen :

$$\frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h}$$

(On considère des valeurs de h suffisamment proches de 0 ($h > -x$) pour que $\ln(x+h)$ ait un sens)

D'après 2.2. : $\ln(x+h) - \ln(x) = \ln\left(\frac{x+h}{x}\right) = \ln\left(1+\frac{h}{x}\right)$

Posons $u = \ln\left(1+\frac{h}{x}\right)$, ainsi : $e^u = 1 + \frac{h}{x}$

$$h = x(e^u - 1)$$

Comme la fonction \ln est continue en 1, nous avons :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \ln\left(1+\frac{h}{x}\right) = \ln(1) = 0$$

Donc, lorsque h tend vers 0, u tend aussi vers 0. Nous pouvons donc écrire :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{x(e^u - 1)}$$

Or, nous savons que : $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - e^0}{u - 0} = \exp'(0) = 1$

D'où : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \frac{1}{x}$

Remarque :

On sait que pour tout $x > 0$, $e^{\ln x} = x$. Ainsi en utilisant la propriété de dérivation des fonctions composées, on peut écrire pour tout $x > 0$:

$$(e^{\ln x})' = (\ln' x) \times e^{\ln x} \Leftrightarrow (x)' = (\ln' x) \times x \Leftrightarrow \ln' x = \frac{1}{x}$$

6) Limites :

a) Propriété : (limites aux bornes de l'ensemble de définition)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

Preuve :

- Soit $M > 0$.

Pour tout $x > 0$, on a : $\ln x \geq M \Leftrightarrow x \geq e^M$

Ainsi, si $x \geq e^M$ on a $\ln x \geq M$

Ce résultat est vrai pour tout $M > 0$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

- Pour étudier $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x$, posons $X = \frac{1}{x}$ c'est-à-dire $x = \frac{1}{X}$

Lorsque x tend vers 0 par valeurs positives X tend vers $+\infty$.

On a $\ln x = \ln \frac{1}{X} = -\ln X$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = \lim_{X \rightarrow +\infty} -\ln X$. On sait que $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$ donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

b) Propriété : (conséquences de la dérivabilité)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

- $\ln(1+x)$ a pour approximation affine x au voisinage de 0

c) Propriété : (Croissance comparée)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

- Pour déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$, posons $X = \ln x$ on a alors $e^X = x$

Lorsque x tend vers $+\infty$, $\ln x$ tend vers $+\infty$, donc X tend vers $+\infty$.

On peut écrire $\frac{\ln x}{x} = \frac{X}{e^X}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X}$.

Or on sait que $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ donc $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$ et par conséquent :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

- Pour déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$, posons $X = \frac{1}{x}$ on a alors $x = \frac{1}{X}$

Lorsque x tend vers 0 par valeurs positives, $\frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$, donc X tend vers $+\infty$

On peut écrire $x \ln x = \frac{1}{X} \ln \frac{1}{X} = -\frac{1}{X} \ln X = -\frac{\ln X}{X}$

Or on sait que $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$ donc $\lim_{X \rightarrow +\infty} -\frac{\ln X}{X} = 0$ et par conséquent :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

7) Courbe représentative:

Soit $M(x, y)$ un point de la courbe de la fonction logarithme (voir figure 2) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On a donc $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y = \ln(x)$.

Comme la fonction \ln est la bijection réciproque de la fonction exponentielle, on a alors $x = e^y$. Donc le point $M'(y, x)$ est situé sur la courbe de la fonction exponentielle. Or, le point $M'(y, x)$ est le symétrique⁽¹⁾ du point $M(x, y)$ par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$. En conséquence :

Les courbes C_{\exp} et C_{\ln} sont symétriques par rapport à la première bissectrice Δ (droite d'équation $y = x$)

