Chapitre GP6 : *Combinatoire*

Durée : 1,5 semaine	Séquence IV
Démonstrations :	Tice :

Objectifs : Après avoir fait du dénombrement « à la main », en particulier à l'aide d'arbres ou de tableaux, et en avoir vu les limites, l'objectif de ce chapitre est d'apprendre à dénombrer diverses situations en utilisant des situations de références (tirages successifs avec ou sans remise – tirages simultanés)

Points du programme visés :

Contenus	Modalités de mise en oeuvre	Commentaires
Exemples de lois discrètes Introduction des combinaisons, notées $\binom{n}{p}$. Formule du binôme.	On introduira la notation n !. L'élève devra retrouver les formules : $\binom{n}{p}=\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}$ $\binom{n}{p}=\binom{n}{n-p}$	Le symbole $\binom{n}{p}$ peut être désigné par la locution "p parmi n". Pour les dénombrements intervenant dans les problèmes, on en restera à des situations élémentaires résolubles à l'aide d'arbres, de diagrammes ou de combinaisons.

I. Situations de référence

De nombreuses expériences aléatoires peuvent s'assimiler à des tirages de boules au hasard dans une urne et se modélisent par une loi équirépartie. Ce sont des situations de référence.

Dans la suite *U* désigne une urne contenant *n* boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à *n*.

1°) Tirages successifs avec remise :

On tire une boule de l'urne *U*, on note son numéro puis on la replace dans l'urne. On effectue *p* tirages de la sorte (dits successifs avec remise), où *p* est un entier naturel inférieur ou égal à *n*.
A chaque tirage, on a le même nombre de boules qu'au tirage précédent, à savoir *n*. Comme on effectue *p* tirages, on a :

a) Propriété :

Le nombre de listes ordonnées de longueur p formées d'éléments d'un ensemble à n éléments est n^p

b) Exemple :

On lance 3 dés équilibrés à 6 faces et on note le numéro de chaque face. Combien de résultats différents peut-on obtenir ?

2°) Tirages successifs sans remise :

On tire une boule de l'urne *U*, on note son numéro puis on ne la replace pas dans l'urne. On effectue *p* tirages de la sorte (dits successifs sans remise), où *p* est un entier naturel inférieur ou égal à *n*.

Au 1er tirage on a *n* choix, au second *n*-1, au 3ème *n*-2, … au p^{ième} *n*-*p*+1. Donc :

a) Propriété :

Le nombre de listes ordonnées de longueur p formées d'éléments distincts d'un ensemble de n éléments est $n(n-1)...(n-p+1)$

b) Exemple :

Dans une course de chevaux réunissant 17 partants, combien y a-t-il de tiercés possibles ?
(Attention l'ordre est important)
Quelle est la probabilité de gagner le tiercé dans l'ordre ?

c) Cas particulier :

Lorsque *n*=*p*, toutes les boules sont tirées une à une et :

Le nombre de listes de longueur n formées de n éléments est $n(n-1)(n-2)...\times 2\times 1$.

Remarque : On parle de *permutations* des *n* éléments.

d) Notation factorielle :

Définition :

Pour $n\in\mathbb{N}$ *:*
$n!=n(n-1)(n-2)\times...\times 2\times 1$ *pour* $n\geq 2$ *et* $1!=1$ *et* $0!=1$ *par convention.*

3°) Tirages simultanés :

On tire simultanément *p* boules de l'urne *U*. On obtient ainsi un ensemble de *p* numéros pris parmi *n*, que l'on appelle combinaison.

a) Théorème :

Le nombre de combinaisons (listes non ordonnées) de p éléments parmi n ($p\leq n$ *) est noté* $\binom{n}{p}$ *et est égal à*

$$\frac{n(n-1)(n-2)...(n-p+1)}{p!}=\frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Preuve :

Pour fabriquer une liste de *p* éléments d'un ensemble à *n* éléments :

• soit on choisit p éléments un à un dans un certain ordre. Il y en a $n(n-1)...(n-p+1)$

• soit on choisit simultanément p éléments que l'on ordonne ensuite :

- il existe $\binom{n}{p}$ parties comprenant p éléments ;
- chacune de ces parties conduit à $p!$ listes.

Il existe donc $\binom{n}{p} \times p!$ parties.

On a donc : $\binom{n}{p} \times p! = n(n-1)...(n-p+1)$

Ainsi : $\binom{n}{p} = \dfrac{n(n-1)...(n-p+1)}{p!} \times \dfrac{(n-p)...\times 2\times 1}{(n-p)...\times 2\times 1} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

b) Exemple :

Au nouveau Loto national depuis le mois d'octobre 2008, on coche 5 numéros parmi 49 et un numéro «chance » parmi 10.
Combien de grilles différentes existe-t-il ?

$\binom{49}{5} \times 10 = 1906884 \times 10 = 19068840$

Combien de grilles différentes existaient-t-il avant octobre 2008 ? (on cochait 6 numéros parmi 49)

$\binom{49}{6} = \dfrac{49!}{6!43!} = 13983816$

Remarques :

Soit E un ensemble de n éléments.

- L'ensemble E possède deux sous-ensembles particuliers : $\varnothing$ et lui-même. E possède donc une combinaison à 0 élément et une combinaison à n éléments.
- Ainsi $\binom{n}{n} = 1$ et $\binom{n}{0} = 1$
- Dans l'ensemble E à n éléments, il y a n parties à un seul élément. Ainsi $\binom{n}{1} = n$

II. Propriétés des combinaisons

1) Propriété :

- *Pour tout entier naturel n, et pour tout entier p tel que $0 \leq p \leq n$, on a :* $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
- *De plus, si $n \geq 1$ et $1 \leq p \leq n-1$, alors :* $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$

Preuve : **R.O.C**

- $\binom{n}{n-p} = \dfrac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \dfrac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}$

- Soit E un ensemble à $n + 1$ éléments et a un élément de E.

  Dénombrons les parties de E à $p + 1$ éléments $\binom{n+1}{p+1}$ en considérant les parties qui contiennent a et celles qui ne contiennent pas a.

  Une partie de E à $p + 1$ éléments de E contenant a contient p éléments choisis parmi les n éléments de E autres que a.

  Le nombre de ces parties est donc $\binom{n}{p}$.

  Une partie de E à $p + 1$ éléments de E ne contenant pas a contient $p + 1$ éléments choisis parmi les n éléments de E autres que a.

  Le nombre de ces parties est donc $\binom{n}{p+1}$.

  On en déduit que : $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$

2°) Le triangle de pascal :

La deuxième formule permet de calculer les nombres $\binom{n}{p}$ de proche en proche en formant le tableau suivant appelé **triangle de Pascal** .

n \ *p*	0	1	2	3	4	5	6
0	**1**						
1	**1**	**1**					
2	**1**	**2**	**1**				
3	**1**	**3 +**	**3 =**	**1**			
4	**1**	**4**	**6**	**4**	**1**		
5	**1**	**5**	**10**	**10**	**5**	**1**	
6	**1**	**6**	**15**	**20**	**15**	**6**	**1**

- $\binom{n}{p}$ n'est défini que pour $p \leq n$; on ne remplit donc pas les cases situées au-dessus de la diagonale.
- Tous les nombres de la diagonale sont obtenus en utilisant le résultat $\binom{n}{n} = 1$.
- Tous les nombres de la première colonne sont obtenus en utilisant la formule $\binom{n}{0} = 1$.
- Tous les autres nombres sont obtenus en utilisant le résultat : $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$

« tout nombre du tableau est la somme du nombre placé au-dessus de lui et du nombre précédant ce dernier dans le tableau »

III. La formule du binôme de Newton

Soit a et b deux nombres réels (ou complexes) .
On a $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ et $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
Les coefficients des termes des membres de droite sont respectivement (1 ; 2 ; 1) et (1 ; 3 ; 3 ; 1) .
On retrouve la deuxième ligne et la troisième ligne du triangle de Pascal. Ce résultat est général et se traduit par le théorème suivant.

1°) Propriété :

Soit a et b deux réels (ou complexes) et n un entier naturel non nul . On a :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a\, b^{n-1} + b^n$$

Preuve :

On considère la proposition P(n) : $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$

Initialisation : Pour $n = 1$, on a :

$\binom{1}{0} = 1$ et $\binom{1}{1} = 1$, donc :

$$\sum_{p=0}^{p=1} \binom{1}{p} a^{1-p} b^p = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = a + b = (a+b)^1$$

La proposition P(1) est donc vérifiée.

Hérédité :
Supposons que P(n) est vraie pour un entier n fixé, $n \geq 1$.

On a alors $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$

On peut écrire :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b)\left(\sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p\right) \\
&= a\left(\sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p\right) + b\left(\sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p\right) \\
&= \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} a^{n+1-p} b^p + \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^{p+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{p=1}^{p=n} \binom{n}{p} a^{n+1-p} b^p + \sum_{p=0}^{p=n-1} \binom{n}{p} a^{n-p} b^{p+1} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{p=1}^{p=n} \binom{n}{p} a^{n+1-p} b^p + \sum_{i=1}^{i=n} \binom{n}{i-1} a^{n-i+1} b^i + b^{n+1}
\end{aligned}$$

(en remplaçant p par i - 1)

$$= a^{n+1} + \sum_{p=1}^{p=n} \binom{n}{p} a^{n+1-p} b^p + \sum_{p=1}^{p=n} \binom{n}{p-1} a^{n+1-p} b^p + b^{n+1}$$

(en remplaçant i par p)

$$= a^{n+1} + \sum_{p=1}^{p=n} \left[\binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}\right] a^{n+1-p} b^p + b^{n+1}$$

On obtient alors $(a+b)^{n+1} = \sum_{p=0}^{p=n+1} \binom{n+1}{p} a^{n+1-p} b^p$ c'est-à-dire que P(n+1) est vraie.

Conclusion : on a donc démontré que la proposition P(n) est vérifiée pour tout entier $n \geq 1$.

2°) Exemples :

- Calcul de $(a + b)^6$
  En lisant les valeurs des coefficients dans la ligne numéro 6 du triangle de Pascal, on obtient :
  $(a + b)^6 = a^6 + 6 a^5 b + 15 a^4 b^2 + 20 a^3 b^3 + 15 a^2 b^4 + 6 a b^5 + b^6$
  La somme des exposants de a et b dans chaque terme est toujours égale à 6.

- Lorsque $a = b = 1$, on a pour tout entier n non nul :

$$2^n = (1 + 1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

  C'est le nombre de parties d'un ensemble E à n éléments.
  En effet, pour p variant de 0 à n, il y a $\binom{n}{p}$ parties de p éléments ; d'où la somme des $\binom{n}{p}$