Suites Numériques	SN1	Récurrence

Compétences		*Exercices corrigés*
Savoir mener un raisonnement par récurrence pour démontrer une égalité/ une inégalité	Application 1	*Savoir faire 1 (énoncé 2) page 13* *52 p 24*
Déterminer la forme explicite d'une suite avec un raisonnement par récurrence	Application 2	*Savoir faire 1 (énoncé 1) page 13*
Déterminer les variations d'une suite avec un raisonnement par récurrence	Application 3	

1. Reprise d'étude 1S :

Relire/reprendre vos cours de 1S ;livre TS page 385 cours de Y. Monka (math et tiques) .
Ou le site Mathrix : pour reprendre la leçon et faire des exercices : https://mathrix.fr/maths-fr/1ere-s/suites-numeriques

Généralités sur les suites :
Cours avec lien vidéo : http://www.maths-et-tiques.fr/telech/Suites.pdf

- Calculer les premiers termes d'une suite à la main, avec une calculatrice, avec un tableur, avec un algorithme.
- Représenter graphiquement les termes d'une suite.
- Étudier les variations d'une suite en étudiant le signe de $u_{n+1}-u_n$.
- Conjecturer à la calculatrice le comportement à l'infini d'une suite.

Suites Arithmétiques-Suites géométriques :
Cours avec lien vidéo : http://www.maths-et-tiques.fr/telech/SuitesAG.pdf

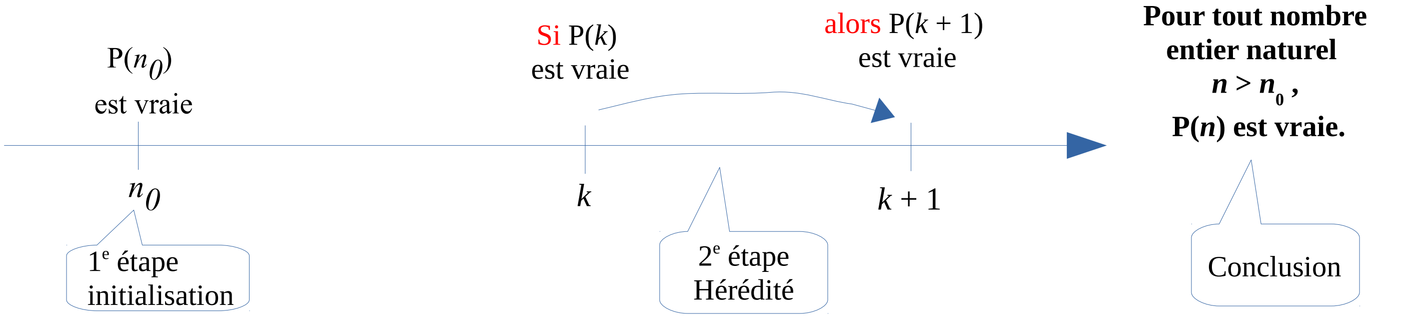
-Définition, expression explicite d'une suite arithmétique (géométrique)
- Démontrer qu'une suite est ou n'est pas arithmétique (géométrique).
- Sommes des termes d'une suite arithmétique (géométrique).

2. Raisonnement par récurrence :

En mathématiques un certains nombres de propriété dépend d'un entier naturel *n*.
Ces propriétés, souvent notée $\mathrm{P}(n)$ peuvent être de différentes natures :

- **Une égalité** : Pour tout entier naturel *n*, $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$;
- **Une inégalité** : pour tout réel $x>0$ et pour tout entier naturel *n*, $(1+x)^n\geqslant 1+nx$;
- **Une phrase** : pour tout entier naturel *n*, $\frac{n^3-n}{3}$ est un entier.

Principe de récurrence : si une propriété P(*n*) est vraie pour l'entier n_0 et s'il est prouvé que lorsqu'elle est vraie pour un entier *k* supérieur ou égal à n_0 , elle est vraie aussi pour l'entier *k*+1, alors cette propriété est vraie pour tous les entiers supérieurs ou égaux à n_0 .



Pour une autre explication : M. Védrine : https://www.youtube.com/watch?v=VBjLlXbHmRk

<u>Méthode pour démontrer qu'une propriété est vraie par récurrence :</u>
On a deux étapes :
- *<u>initialisation de la récurrence :</u>* la propriété est vraie pour n_0 ;
- *<u>l'hypothèse de récurrence (hérédité) :</u>* on suppose qu'il existe un entier $k \geqslant n_0$ pour lequel la propriété est vraie. On démontre alors que la propriété est vraie à l'étape $k + 1$

Vocabulaire : une propriété est dite héréditaire si, lorsqu'elle est vraie pour un entier k, elle est aussi vraie pour un entier $k + 1$.

Remarque : l'initialisation est importante (cf exemple du manuel page 12)

<u>Application 1 :</u> Démontrer une égalité/inégalité avec une récurrence :
On note $1\times2\times3\times\ldots\times n=n!$ (ce qu'on lit « factorielle » n)
Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n! \geqslant 2^{n-1}$

exercices 7 page 22 et 50; 51 page 24

<u>Applications aux suites :</u> *L'étude des suites définies par récurrence n'est pas toujours facile.*
Grâce au raisonnement par récurrence, on peut justifier des variations d'une suite (conjecturées préalablement à la calculatrice) ou déterminer l'expression explicite d'une suite.

<u>Application 2 : Déterminer la forme explicite d'une suite</u>
Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0=2$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+1$.
Montrer par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{3}{2}$.

exercices 3 à 6 pages 22 ; 42 à 44 page 24

<u>Application 3 : Déterminer les variations d'une suite</u>
La suite (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\sqrt{2+u_n} \end{cases}$.
a) Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x)=\sqrt{2+x}$. Étudier les variations de f

b) Prouver que la suite (u_n) est strictement croissante c'est à dire que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}>u_n$.
c) Prouver que la suite (v_n) définie par $\begin{cases} v_0=7 \\ v_{n+1}=\sqrt{2+v_n} \end{cases}$ est décroissante et minorée par 0.
Cela revient à montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $0\leqslant v_{n+1}\leqslant v_n$.

exercices 45 à 49 page 24

D'autres exemples en vidéo :
Effectuer une démonstration par récurrence - Terminale
https://www.youtube.com/watch?v=H6XJ2tB1_fg&list=PLVUDmbpupCarZdaGUMO7DV35pi1I8zIJZ&index=2
Démontrer par récurrence l'expression générale d'une suite - Terminale
https://www.youtube.com/watch?v=OIUi3MG8efY&index=4&list=PLVUDmbpupCarZdaGUMO7DV35pi1I8zIJZ
Démontrer par récurrence la monotonie d'une suite - Terminale
https://www.youtube.com/watch?v=nMnLaE2RAGk&list=PLVUDmbpupCarZdaGUMO7DV35pi1I8zIJZ&index=5

Quand la récurrence n'est d'aucun secours...

Exemple 1 : on a l'initialisation, mais pas l'hérédité

On appelle **nombre de Fermat** le nombre $F_n = 2^{2^n} + 1$, $n \in \mathbb{N}$.
Fermat (mathématicien français, 1601 - 1665) a affirmé que pour tout entier naturel *n*, F_n est premier.

Je vous laisse tester pour les premières valeurs de *n*...

Dans ce cas, on ne peut pas montrer que la propriété est héréditaire et donc on ne peut pas en déduire que la propriété est vraie pour tout *n*.

À lire : ce poster réalisé dans le cadre de la fête de la sciences par l'Université Blaise Pascal de Clermont Ferrand : http://recherche.math.univ-bpclermont.fr/posters/posters/p_mathsamus_vert4_A4.pdf

Exemple 2 : on a l'hérédité, mais pas l'initialisation

Soit P_n la propriété : « 6 divise $7^n + 1$ pour tout entier $n \geqslant 0$ »

Montrer que cette propriété est héréditaire c'est montrer que **si** elle est vraie au rang *k* **alors** elle reste vraie au rang $k+1$.

Si $7^k + 1 = 6 \times p$, $p \in \mathbb{Z}$ alors $7^{k+1} + 1 = 7^k \times 7 + 1 = (6p-1) \times 7 + 1 = 42p - 7 + 1 = 6 \times (7p-1) = 6 \times p'$ où $p' = 7p - 1$ est un entier

On a donc montré que **si** P_k est vraie **alors** P_{k+1} reste vraie.

P_n est une propriété **héréditaire**.

Or la proposition est fausse pour $n=0$ …

En effet $7^0 + 1 = 1$ et 6 ne divise pas 1... on n'a pas l'initialisation, on ne sait donc pas si la propriété est vraie pour d'autres valeurs entières *n* autres que 0. En fait, la propriété est fausse pour toutes les valeurs entières *n* (facile à montrer en spécialité avec les congruences).

Exemple 3 (on a l'hérédité, mais pas l'initialisation) : page 12 de votre manuel