Exercices supplémentaires : Etude de fonctions

Partie A : Avec les fonctions de référence

Exercice 1

Dans chacun des cas, comparer a^2 et b^2 sans utiliser la calculatrice

1) $a = 2{,}402$ et $b = 2{,}42$
2) $a = 7$ et $b = 4\sqrt{3}$
3) $a = -0{,}5$ et $b = \frac{1}{2}$
4) $a = 3{,}14$ et $b = \pi$

Exercice 2

Donner dans chacun des cas suivants, le meilleur encadrement possible de a^2

1) $a \in [2; 5]$
2) $-20 \leq a \leq -10$
3) $a \in [-1; 3]$
4) $-5 \leq a \leq 5$

Exercice 3

Dans chacun des cas suivant, comparer les inverses des ombres donnés, sans utiliser la calculatrice.

1) 211 et 212
2) $-\frac{3}{4}$ et -1
3) $3{,}14$ et π
4) $2{,}0395$ et $\frac{4078}{2000}$

Exercice 4

Donner, dans chacun des cas suivants, le meilleur encadrement possible pour $\frac{1}{x}$:

1) $x \in [3; 4]$
2) $-2 \leq x \leq -1$
3) $x \in]-\infty; -5]$
4) $x \in]7; +\infty[$

Exercice 5

On considère la fonction $f: x \mapsto x^2 - 3$ définie sur $\mathbb{R}$.

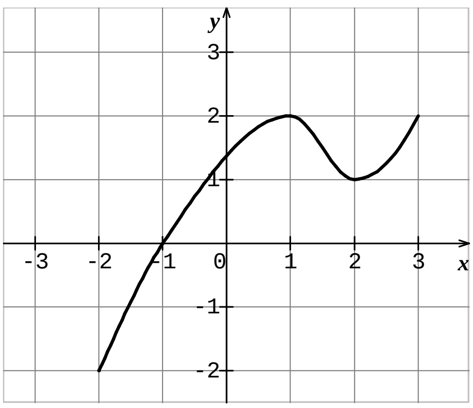
1) Calculer $f(-3)$; $f(\sqrt{2})$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)$
2) Déterminer les antécédents de 2 par f.
3) Démontrer que la fonction f est croissante sur $[0; +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty, 0]$.

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 1$.
Démontrer que la fonction f est croissante sur $]-\infty; 0]$ et décroissante sur $[0; +\infty[$.

Exercice 7

On considère la fonction f dont la courbe représentative est donnée ci-contre. On note g la fonction inverse de f, c'est-à-dire $g = \frac{1}{f}$.



1) Déterminer l'ensemble de définition de g.
2) Justifier que g est décroissante sur $[-2; -1[$.
3) Déterminer, en justifiant, les variations de g sur $]-1; 1]$, sur $[1; 2]$ et sur $[2; 3]$.
4) Dresser le tableau de variations de g.

Partie B : Avec la fonction racine carrée

Exercice 1

Déterminer le plus grand ensemble de définition possible pour la fonction f dans chacun des cas suivants

1) $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$
2) $f(x) = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}$
3) $f(x) = \sqrt{x^2-5x+6}$
4) $f(x) = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+5}}$
5) $f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{x}}$

Exercice 2

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x+2} - 1$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Justifier que f est croissante sur $[-2; +\infty[$.
3) Résoudre $f(x) = 4$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie par $f(x) = 2 - \sqrt{x-3}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Justifier que f est décroissante sur $[3; +\infty[$.
3) Démontrer que f admet un maximum que l'on précisera.
4) Résoudre $f(x) = 0$.

Exercice 4

Pour $0 \leq x \leq 4$, déterminer un encadrement de

1) $2\sqrt{x} + 3$
2) $\sqrt{4x}$
3) $\sqrt{x+9}$
4) $\sqrt{8-2x}$
5) $\sqrt{x^2+8}$

Partie C : Avec la valeur absolue

Exercice 1

Calculer les nombres suivants :

$A = |-2-3|$

$B = |-6+9|$

$C = |-6| + |9|$

$D = |1-2-3|$

$E = |1| + |-2| + |-3|$

$F = |1-2-3| - |-4|$

Exercice 2

Exprimer les nombres suivants sans valeur absolue.

$A = \left|\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right|$

$B = \left|\sqrt{5} + 1\right|$

$C = \left|-\sqrt{3} - \sqrt{6}\right|$

$D = \left|-\sqrt{2} + 1\right|$

$E = \left|\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right|$

$F = |\pi - 1|$

$G = \left|2\sqrt{3} - 3\right|$

$H = |-\pi^2 + 10|$
$I = \left|\frac{2}{3} - 1 + \sqrt{2}\right|$
$J = \left|-\sqrt{3} - 1\right|$

Exercice 3
Dans chaque cas, écrire l'expression E sans utiliser la valeur absolue, en tenant compter de l'hypothèse sur x, puis simplifier au maximum.
1) $E = |x-1| + |x| - 2|x+2|$ pour $x \geq 1$
2) $E = \left|\frac{2}{3} - x\right| - |x| + |x-1|$ pour $x \leq 0$
3) $E = |2x| + 2|x+1| + |-3-x|$ pour $x \geq 0$

Exercice 4
Exprimer sans valeurs absolues :
$A = \left|\sqrt{3} - 4\right| + 2\left|5 - 2\sqrt{3}\right| - \left|-6 - \sqrt{3}\right|$
$B = |10^2 - 10^{-3}| - 2|10^{-2} - 10|$
$C = \left|2 + \sqrt{2}\right| \times \left|-3 + 2\sqrt{2}\right| - 3\left|-5 - \sqrt{2}\right|$
$D = \left|\sqrt{98} - \sqrt{18}\right| - 3\left|\sqrt{8} - 2\sqrt{72}\right|$

Exercice 5
Résoudre les équations et les inéquations suivantes
a) $|x-7| = 2$
b) $|5+x| = \sqrt{2}$
c) $|2x+3| = 5$
d) $|x| = \pi$
e) $|x+3| > 2$
f) $|4x-6| \leq 3$
g) $2 \leq |x| \leq 6$
h) $1 < |-2x+7| < 5$
i) $|x+2| = |x-6|$
j) $|x-3| > |x+1|$

Exercice 6
Résoudre les équations suivantes de manière algébrique ou géométrique.
1) $|x| = 4$
2) $|x| = -3$
3) $|x| + 2x = -1$
4) $|x-5| = 3$
5) $|2x+1| = 7$
6) $|x+5| = |8-x|$

Exercice 7
Résoudre géométriquement les inéquations suivantes
1) $|x| \leq 4$
2) $|x| \geq 1$
3) $|x| - 3 \leq 2$
4) $|x-4| \geq 2$
5) $|4x+3| \leq 1$

Partie D : Bilan
Exercice 1
On veut résoudre l'équation $\sqrt{x} = x - 1$.
1) Tracer sur l'écran de la calculatrice les courbes représentatives des fonctions $f: x \mapsto \sqrt{x}$ et $g: x \mapsto x - 1$.
Conjecturer le nombre de solutions et une valeur approchée de chaque solution.
2) Démontrer que si $x < 1$, x ne peut pas être solution de l'équation.
3) On suppose que $x \geq 1$. Démontrer que l'équation $\sqrt{x} = x - 1$ est équivalente à $x^2 - 3x + 1 = 0$.

4) Résoudre cette dernière équation et conclure.

Exercice 2

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{-x}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Démontrer que f est décroissante sur $]-\infty; 0]$.
3) Résoudre $f(x) = 5$.

Exercice 3

On considère la fonction $f : x \mapsto a\sqrt{x} + b$ définie sur $]0; +\infty[$ où a et b sont deux réels.
On donne $f(4) = 0$ et $f(1) = 2$.

1) Déterminer a et b.
2) Démontrer que f est décroissante sur $\left]0\,; +\infty\right[$.

Exercice 4

On considère la fonction $f : x \mapsto a\sqrt{x+1} - 3$ définition sur $[-1; +\infty[$.

1) Déterminer le sens de variations de f en discutant suivant les valeurs de a.
2) On donne $f(8) = -5$. Démontrer que f est décroissante sur $[-1; +\infty[$ et qu'elle ne prend que des valeurs négatives.

Exercice 5

On considère la fonction $f : x \mapsto x + |x| + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

1) Ecrire $f(x)$ sans utiliser la valeur absolue, suivant les valeurs de x.
2) Représenter graphiquement la courbe de la fonction f.
3) Démontrer que pour tout réel x, $f(x) \geq 1$.

Exercice 6

On considère la fonction $f : x \mapsto |2x - 5|$ définie sur $\mathbb{R}$.

1) Ecrire $f(x)$ sans utiliser la valeur absolue, suivant les valeurs de x.
2) Dresser le tableau de variations de f.
3) Représenter graphiquement la courbe de la fonction f.

Exercice 7

On considère la fonction $f : x \mapsto 2|x| + |x - 3|$ définie sur $\mathbb{R}$.

1) Ecrire $f(x)$ sans utiliser la valeur absolue, suivant les valeurs de x.
2) Dresser le tableau de variations de f.
3) Représenter graphiquement la courbe de la fonction f.

Exercice 8

On considère la fonction $f : x \mapsto |x + 2| - |3x - 4|$ définie sur $\mathbb{R}$.

1) Ecrire $f(x)$ sans utiliser la valeur absolue, suivant les valeurs de x.
2) Dresser le tableau de variations de f.
3) Représenter graphiquement la courbe de la fonction f.

Correction exercices supplémentaires : Etude de fonctions

Partie A : Avec les fonctions de référence

Exercice 1

1) $0 < a < b$ donc $a^2 < b^2$ car la fonction carrée est croissante sur $[0; +\infty[$
2) $a^2 = 49$ et $b^2 = 4^2 \times 3 = 16 \times 3 = 48$ donc $a^2 > b^2$
3) $a = -b$ donc $a^2 = b^2$
4) $0 < a < b$ donc $a^2 < b^2$ car la fonction carrée est croissante sur $[0; +\infty[$

Exercice 2

1) $2 \leq a \leq 5$ donc $4 \leq a^2 \leq 25$ car la fonction carrée est croissante sur $[0; +\infty[$
2) $-20 \leq a \leq -10$ donc $400 \geq a^2 \geq 100$ car la fonction carrée est décroissante sur $]-\infty; 0]$
3) $0 \leq a^2 \leq 9$ car si $a \in [-1; 0]$ alors $a^2 \in [0; 1]$ et si $a \in [0; 3]$ alors $a^2 \in [0; 9]$.
4) $-5 \leq a \leq 5$ donc $0 \leq a^2 \leq 25$ car si $a \in [0; 5]$ alors $a^2 \in [0; 25]$ tout comme si $a \in [-5; 0]$.

Exercice 3

1) $211 < 212$ donc $\frac{1}{211} > \frac{1}{212}$ car la fonction inverse est décroissante sur $]0\,; +\infty[$
2) $-\frac{3}{4} > -1$ donc $-\frac{4}{3} < -1$ car la fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$
3) $3{,}14 < \pi$ car la fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$
4) $2{,}0395$ et $\frac{4078}{2000} = \frac{2036}{1000} = 2{,}036$ donc $\frac{1}{2{,}0395} < \frac{1}{2{,}036}$ car la fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$

Exercice 4

1) $3 \leq x \leq 4$ donc $\frac{1}{3} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{4}$ car la fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$
2) $-2 \leq x \leq -1$ donc $-\frac{1}{2} \geq \frac{1}{x} \geq -1$ car la fonction inverse est décroissante sur $]-\infty; 0[$
3) $x \leq -5$ donc $0 \geq \frac{1}{x} \geq -\frac{1}{5}$ car la fonction inverse est décroissante sur $]-\infty; 0[$
4) $x > 7$ donc $0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{7}$ car la fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$

Exercice 5

1) $f(-3) = 6\,; f(\sqrt{2}) = -1$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{11}{4}$
2) $f(x) = 2 \Leftrightarrow x^2 - 3 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \sqrt{5}$ ou $-\sqrt{5}$

Les antécédents de 2 par f sont donc $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$.

3) f est de la forme $u + k$ avec u la fonction carrée et $k = -3$ donc les variations de f sont les mêmes que celles de u. Donc f est croissante sur $[0; +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty, 0]$.

Exercice 6

$x \mapsto x^2$ est croissante sur $[0; +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty, 0]$.
Donc $x \mapsto -x^2$ est décroissante sur $[0; +\infty[$ et croissante sur $]-\infty, 0]$ car on multiplie par un nombre négatif.
Et donc, par addition de 1, f est décroissante sur $[0; +\infty[$ et croissante sur $]-\infty, 0]$.

Exercice 7

1) g est de la forme $\frac{1}{f}$ donc elle est définie pour x tel que $x \in D_f$ et $f(x) \neq 0$. Ici , $D_f = [-2; 3]$ et f s'annule uniquement en -1. Donc g est définie sur $[-2; -1[\cup]-1; 3]$.
2) Sur $[-2; -1[$: f est croissante et ne s'annule pas donc la fonction $\frac{1}{f}$ est décroissante car les variations de $\frac{1}{u}$ sont les opposées de celles de u.
3) Sur $]-1; 1]$, f est croissante et ne s'annule pas donc $\frac{1}{f}$ est décroissante.

Sur $[1; 2]$, f est décroissante et ne s'annule pas donc $\frac{1}{f}$ est croissante.

Sur $[2; 3]$, f est croissante et ne s'annule pas donc $\frac{1}{f}$ est décroissante.

x	-2		-1		1		2		3
Variations de g	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\|$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

Partie B : Avec la fonction racine carrée

Exercice 1

1) $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$: f est de la forme $\sqrt{u} - \sqrt{v}$ avec $u : x \mapsto x+1$ et $v : x \mapsto x-1$. Elle est donc définie pour $u(x) \geq 0$ et $v(x) \geq 0$. Or$u(x) \geq 0 \Leftrightarrow x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$ et $v(x) \geq 0 \Leftrightarrow x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.
Les deux conditions doivent être vérifiées en même temps donc $D_f = [1; +\infty[$.

2) $f(x) = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}$: f est de la forme $\sqrt{u} + \sqrt{v}$ avec $u : x \mapsto x^2+1$ et $v : x \mapsto x^2-1$.
Elle est donc définie pour $u(x) \geq 0$ et $v(x) \geq 0$. Or $u(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2+1 \geq 0$ qui est toujours vrai et $v(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2-1 \geq 0$: $\Delta = 4$ donc x^2-1 est du signe de $a = 1$ sauf entre les racines 1 et -1 donc v est positive sur $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$. On a donc $D_f =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$.

3) $f(x) = \sqrt{x^2-5x+6}$: f est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u : x \mapsto x^2-5x+6$. Elle est définie pour $u(x) \geq 0$ or $u(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2-5x+6 \geq 0$: $\Delta = 1$ donc x^2-5x+6 est du signe de $a = 1$ sauf entre les racines 2 et 3.
Finalement $D_f =]-\infty; 2] \cup [3; +\infty[$.

4) $f(x) = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+5}}$: f est de la forme $\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$ avec $u : x \mapsto x-3$ et $v : x \mapsto x+5$. Elle est définie pour $u(x) \geq 0$; $v(x) \geq 0$ et $v(x) \neq 0$, autrement dit $u(x) \geq 0$ et $v(x) > 0$. Or
$u(x) \geq 0 \Leftrightarrow x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$ et $v(x) > 0 \Leftrightarrow x+5 > 0 \Leftrightarrow x > -5$
Les deux conditions doivent être vérifiées en même temps donc $D_f = [3; +\infty[$.

5) $f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{x}}$: f est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u : x \mapsto \frac{2-x}{x}$. Elle est donc définie pour $u(x) \geq 0$. Or u est définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ (car le dénominateur doit être non nul). L'étude du signe de u passe par un tableau de signes :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Signe de x		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $u(x)$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

Au final $D_f =]0; 2]$

Exercice 2

1) f est de la forme $\sqrt{u} - 1$ avec $u : x \mapsto x+2$ donc elle est définie pour $u(x) \geq 0$ or $u(x) \geq 0 \Leftrightarrow x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$ donc $D_f = [-2 ; +\infty[$

2) u est une fonction affine de coefficient directeur positif donc elle est croissante sur D_f.
$\sqrt{u}$ a les mêmes variations que u et ajouter -1 ne modifie pas les variations donc f est bien croissante sur D_f.

3) Sur $[-2 ; +\infty[$:

$$f(x) = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} - 1 = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = 5$$

$\Leftrightarrow x+2 = 25$ car la fonction carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$
$\Leftrightarrow x = 23$ donc $S = \{23\}$

Exercice 3

1) f est de la forme $2 - \sqrt{u}$ avec $u : x \mapsto x-3$. Elle est donc définie pour $u(x) \geq 0$, autrement dit $D_f = [3; +\infty[$

2) u est croissante sur D_f car c'est une fonction affine de coefficient directeur positif.
$\sqrt{u}$ a les mêmes variations que u ; la multiplication par (-1) change les variations donc $-\sqrt{u}$ est décroissante sur D_f. Ajouter 2 ne modifie pas les variations donc f est bien décroissante sur D_f.

3) Comme f est décroissante sur D_f, on aura toujours $f(x) \leq f(3)$ donc $f(3)$ est le maximum de f et vaut 2.

4) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{x-3} = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{x-3} = -2 \Leftrightarrow \sqrt{x-3} = 2$
$\Leftrightarrow x-3 = 4$ car la fonction carrée est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$
$\Leftrightarrow x = 7$ donc $S = \{7\}$

Exercice 4

1) $0 \leq x \leq 4$

donc $0 \leq \sqrt{x} \leq 2$ car la fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;+\infty[$
donc $0 \leq 2\sqrt{x} \leq 4$ car on multiplie par 2 qui est positif
donc $\boxed{3 \leq 2\sqrt{x}+3 \leq 7}$ en ajoutant 3.

2) $0 \leq x \leq 4$

donc $0 \leq 4x \leq 16$ en multipliant par 4 qui est positif
donc $\boxed{0 \leq \sqrt{4x} \leq 4}$ car la fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;+\infty[$

3) $0 \leq x \leq 4$

donc $9 \leq x+9 \leq 13$ en ajoutant 9
donc $\boxed{3 \leq \sqrt{x+9} \leq \sqrt{13}}$ car la fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;+\infty[$

4) $0 \leq x \leq 4$

donc $0 \geq -2x \geq -8$ en multipliant par -2 qui est négatif
donc $8 \geq 8-2x \geq 0$ en ajoutant 8
donc $\boxed{\sqrt{8} \geq \sqrt{8-2x} \geq 0}$ car la fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;+\infty[$

5) $0 \leq x \leq 4$

donc $0 \leq x^2 \leq 16$ car la fonction carrée est croissante sur $[0;+\infty[$
donc $8 \leq x^2+8 \leq 24$ en ajoutant 8
donc $\boxed{\sqrt{8} \leq \sqrt{x^2+8} \leq \sqrt{24}}$ car la fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;+\infty[$

<u>Partie C : Avec la valeur absolue</u>

Exercice 1

$A = |-2-3| = |-5| = \boxed{5}$
$B = |-6+9| = |3| = \boxed{3}$
$C = |-6|+|9| = 6+9 = \boxed{15}$
$D = |1-2-3| = |-4| = \boxed{4}$
$E = |1|+|-2|+|-3| = 1+2+3 = \boxed{6}$
$F = |1-2-3|-|-4| = |-4|-4 = 4-4 = \boxed{0}$

Exercice 2

Exprimer les nombres suivants sans valeur absolue.

$A = \left|\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right| = \boxed{\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}}$ car $\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2} > 0$
$B = |\sqrt{5}+1| = \boxed{\sqrt{5}+1}$ car $\sqrt{5}+1 > 0$
$C = |-\sqrt{3}-\sqrt{6}| = -(-\sqrt{3}-\sqrt{6}) = \boxed{\sqrt{3}+\sqrt{6}}$ car $-\sqrt{3}-\sqrt{6} < 0$
$D = |-\sqrt{2}+1| = -(-\sqrt{2}-1) = \boxed{\sqrt{2}-1}$ car $-\sqrt{2}+1 < 0$
$E = \left|\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}}$ car $\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$
$F = |\pi-1| = \boxed{\pi-1}$ car $\pi-1 > 0$
$G = |2\sqrt{3}-3| = \boxed{2\sqrt{3}-3}$ car $2\sqrt{3}-3 > 0$
$H = |-\pi^2+10| = \boxed{-\pi^2+10}$ car $-\pi^2+10 > 0$
$I = \left|\frac{2}{3}-1+\sqrt{2}\right| = \frac{2}{3}-1+\sqrt{2} = \boxed{-\frac{1}{3}+\sqrt{2}}$ car $\frac{2}{3}-1+\sqrt{2} > 0$
$J = |-\sqrt{3}-1| = \boxed{\sqrt{3}+1}$ car $-\sqrt{3}-1 < 0$

Exercice 3

1) Comme $x \geq 1$, on a $x-1 \geq 0$ donc $|x-1| = x-1$

Comme $x \geq 1$, on a $x \geq 0$ donc $|x| = x$
Comme $x \geq 1$, on a $x+2 \geq 3 \geq 0$ donc $|x+2| = x+2$. Finalement :
$E = x-1+x-2(x+2) = 2x-1-2x-4 = \boxed{-5}$

2) Comme $x \leq 0$, on a $\frac{2}{3}-x \geq \frac{2}{3}$ donc $\left|\frac{2}{3}-x\right| = \frac{2}{3}-x$

Comme $x \leq 0$, on a $|x| = -x$

Comme $x \leq 0$, on a $x-1 \leq -1$ donc $|x-1| = -x+1$. Finalement :

$E = \frac{2}{3} - x - (-x) + (-x+1) = \boxed{-x + \frac{5}{3}}$

3) Comme $x \geq 0$, on a $2x \geq 0$ donc $|2x| = 2x$.

Comme $x \geq 0$, on a $x+1 \geq 1$ donc $|x+1| = x+1$.

Comme $x \geq 0$, on a $-3-x \leq -3$ donc $|-3-x| = 3+x$. Finalement :

$E = 2x + 2(x+1) + (3+x) = \boxed{5x+5}$

Exercice 4

$A = |\sqrt{3} - 4| + 2|5 - 2\sqrt{3}| - |-6 - \sqrt{3}|$

$= -(\sqrt{3} - 4) + 2(5 - 2\sqrt{3}) - (6 + \sqrt{3})$ car $\sqrt{3} - 4 < 0$; $5 - 2\sqrt{3} > 0$ et $-6 - \sqrt{3} < 0$

$= -\sqrt{3} + 4 + 10 - 4\sqrt{3} - 6 - \sqrt{3} = \boxed{8 - 6\sqrt{3}}$

$B = |10^2 - 10^{-3}| - 2|10^{-2} - 10|$

$= 10^2 - 10^{-3} - 2(-10^{-2} + 10)$ car $10^2 - 10^{-3} > 0$ et $10^{-2} - 10 < 0$

$= 100 - 0{,}001 - 2(-0{,}01 + 10) = \boxed{80{,}019}$

$C = |2 + \sqrt{2}| \times |-3 + 2\sqrt{2}| - 3|-5 - \sqrt{2}|$

$= (2 + \sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) - 3(5 + \sqrt{2})$ car $2 + \sqrt{2} > 0$; $-3 + 2\sqrt{2} < 0$ et $-5 - \sqrt{2} < 0$

$= 6 - 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4 - 15 - 3\sqrt{2} = \boxed{-13 - 4\sqrt{2}}$

$D = |\sqrt{98} - \sqrt{18}| - 3|\sqrt{8} - 2\sqrt{72}|$

$= \sqrt{98} - \sqrt{18} - 3(-\sqrt{8} + 2\sqrt{72})$ car $\sqrt{98} - \sqrt{18} > 0$ et $\sqrt{8} - 2\sqrt{72} < 0$

$= \sqrt{2 \times 49} - \sqrt{2 \times 9} + 3\sqrt{2 \times 4} - 6\sqrt{2 \times 36} = 7\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 3 \times 2\sqrt{2} - 6 \times 6\sqrt{2} = \boxed{-26\sqrt{2}}$

Exercice 5

a) $|x - 7| = 2$: la distance entre x et 7 est égale à 2 donc $S = \{5 ; 9\}$

b) $|5 + x| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |x - (-5)| = \sqrt{2}$:
la distance entre x et -5 est égale à $\sqrt{2}$ donc $S = \{-5 - \sqrt{2}; -5 + \sqrt{2}\}$

c) $|2x + 3| = 5 \Leftrightarrow \left|x + \frac{3}{2}\right| = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \left|x - \left(-\frac{3}{2}\right)\right| = \frac{5}{2}$
La distance entre x et $-\frac{3}{2}$ est égale à $\frac{5}{2}$ donc $S = \{-4; 1\}$

d) $|x| = \pi$ $S = \{-\pi; \pi\}$

e) $|x + 3| > 2 \Leftrightarrow |x - (-3)| > 2$
La distance entre x et -3 est strictement supérieure à 2 donc $S =]-\infty; -5[\cup]-1; +\infty[$

f) $|4x - 6| \leq 3 \Leftrightarrow \left|x - \frac{6}{4}\right| \leq \frac{3}{4} \Leftrightarrow \left|x - \frac{3}{2}\right| \leq \frac{3}{4}$
La distance entre x et $\frac{3}{2}$ est inférieure à $\frac{3}{4}$ donc $S = \left[\frac{3}{4}; \frac{9}{4}\right]$

g) $2 \leq |x| \leq 6$ La distance entre x et 0 est comprise entre 2 et 6 donc
$S = [-6; -2] \cup [2; 6]$

h) $1 < |-2x + 7| < 5 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \left|-x + \frac{7}{2}\right| < \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \left|\frac{7}{2} - x\right| < \frac{5}{2}$
La distance entre $\frac{7}{2}$ et x est comprise entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{5}{2}$ donc $S = [1; 3] \cup [4; 6]$

i) $|x + 2| = |x - 6|$ La distance entre x et -2 est égale à la distance entre x et 6 donc $S = \{2\}$

j) $|x - 3| > |x + 1|$ La distance entre x et 3 est supérieure à la distance entre x et -1 donc
$S =]-\infty; 1[$

Exercice 6

1) $|x| = 4$: La distance de x à 0 est égale à 4 donc $S = \{-4; 4\}$
2) $|x| = -3$: Une distance n'est jamais négative donc $S = \emptyset$
3) $|x| + 2x = -1$:

Pour $x \geq 0$: $|x| = x$ donc $|x| + 2x = -1 \Leftrightarrow x + 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$ ce qui n'est pas possible pour $x \geq 0$.

Pour $x \leq 0$: $|x| = -x$ donc $|x| + 2x = -1 \Leftrightarrow -x + 2x = -1 \Leftrightarrow x = -1$
Finalement $S = \{-1\}$

4) $|x-5| = 3$: La distance entre x et 5 est égale à 3 donc $S = \{2; 8\}$
5) $|2x+1| = 7 \Leftrightarrow \left|x + \frac{1}{2}\right| = \frac{7}{2}$: la distance entre x et $-\frac{1}{2}$ est égale à $\frac{7}{2}$ donc $S = \{-4; 3\}$
6) $|x+5| = |8-x|$ La distance entre x et -5 est égale à la distance entre x et 8 donc $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

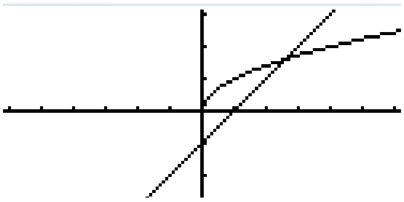
Exercice 7

1) $|x| \leq 4$: la distance entre x et 0 est inférieure à 4 donc $S = [-4; 4]$
2) $|x| \geq 1$: la distance entre x et 0 est supérieure à 1 donc $S =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$
3) $|x| - 3 \leq 2 \Leftrightarrow |x| \leq 5$ donc la distance entre x et 0 est inférieure à 5 donc $S = [-5; 5]$.
4) $|x-4| \geq 2$: la distance entre x et 4 est supérieure à 2 donc $S =]-\infty; 2] \cup [6; +\infty[$
5) $|4x+3| \leq 1 \Leftrightarrow \left|x + \frac{3}{4}\right| \leq \frac{1}{4}$: la distance entre x et $-\frac{3}{4}$ est inférieure à $\frac{1}{4}$ donc $S = \left[-1; -\frac{1}{2}\right]$

Partie D : Bilan

Exercice 1

1) Il semble qu'il y ait un unique point d'intersection entre les deux courbes. Une valeur approchée de la solution de l'équation $\sqrt{x} = x - 1$ est 2,2.



2) Si $x < 1$, alors $x - 1 < 0$ et comme une racine carrée est toujours positive ou nulle, nous n'aurons jamais $\sqrt{x} = x - 1$. Donc l'équation $\sqrt{x} = x - 1$ n'a pas de solutions inférieures strictement à 1.

3) Pour $x \geq 1$:
$\sqrt{x} = x - 1 \Leftrightarrow x = (x-1)^2$ car la fonction carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ et que $x - 1 \geq 0$
$\Leftrightarrow x = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$

4) $x^2 - 3x + 1 = 0$: $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 5 > 0$ donc l'équation a deux solutions : $x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.
Or ceci est vrai pour $x \geq 1$, ce qui est bien le cas pour x_1 mais pas pour x_2.
Au final, il n'y a bien qu'une solution : $S = \left\{\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$

Exercice 2

1) f est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u: x \mapsto -x$ donc elle est définie pour $u(x) \geq 0$ or $u(x) \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$ donc $D_f =]-\infty; 0]$.
2) u est une fonction affine décroissante sur D_f car son coefficient directeur est négatif.
$\sqrt{u}$ a les mêmes variations que u donc f est décroissante sur D_f.
3) $f(x) = 5 \Leftrightarrow \sqrt{-x} = 5 \Leftrightarrow -x = 25$ car la fonction carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$
$\Leftrightarrow x = -25$ donc $S = \{-25\}$

Exercice 3

1) $\begin{cases} f(4) = 0 \\ f(1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\sqrt{4} + b = 0 \\ a\sqrt{1} + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 0 \\ a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ a - 2a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a = -2 \end{cases}$
La fonction f est donc définie par $f(x) = -2\sqrt{x} + 4$.
2) La fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$.
Multiplier par un nombre négatif modifie les variations donc $x \mapsto -2\sqrt{x}$ est décroissante.
Ajouter 4 ne modifie pas les variations donc f est bien décroissante sur $[0; +\infty[$.

Exercice 4

3)
1) $x \mapsto x + 1$ est une fonction affine de coefficient directeur positif donc elle est croissante sur $[-1; +\infty[$
$\sqrt{u}$ a les mêmes variations que u donc $x \mapsto \sqrt{x+1}$ est croissante sur $[-1; +\infty[$.

Si a est positif, alors $x \mapsto a\sqrt{x+1}$ est croissante sur $[-1;+\infty[$ et si a est négatif alors $x \mapsto a\sqrt{x+1}$ est décroissante sur $[-1;+\infty[$.
Ajouter -3 ne modifie pas les variations donc si a est positif, alors f est croissante sur $[-1;+\infty[$ et si a est négatif alors f est décroissante sur $[-1;+\infty[$.

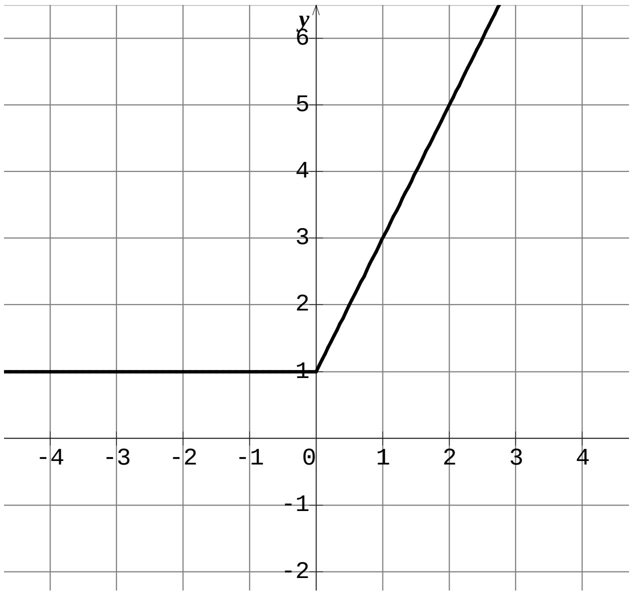
2) $f(8) = -5 \Leftrightarrow a\sqrt{8+1} - 3 = -5 \Leftrightarrow 3a = -2 \Leftrightarrow a = -\frac{2}{3}$

a est donc négatif donc f est décroissante sur $[-1;+\infty[$. Son maximum est donc atteint en -1 et vaut : $f(-1) = -3$. Le maximum étant négatif, f ne prend que des valeurs négatives.

Exercice 5

1) Si $x \geq 0$, alors $|x| = x$ donc $f(x) = 2x + 1$. Si $x \leq 0$ alors $|x| = -x$ et donc $f(x) = 1$.
2) Voir ci-contre
3) Pour $x \leq 0$: $f(x) = 1$ donc $f(x) \geq 1$.

Pour $x \geq 0$: $f(x) = 2x + 1$ donc sur cet intervalle, f est une fonction affine de coefficient directeur positif donc est croissante. Son minimum est donc atteint en 0 et vaut $f(0) = 1$. Donc nous avons aussi $f(x) \geq 1$.
Finalement, nous avons bien toujours $f(x) \geq 1$.



Exercice 6

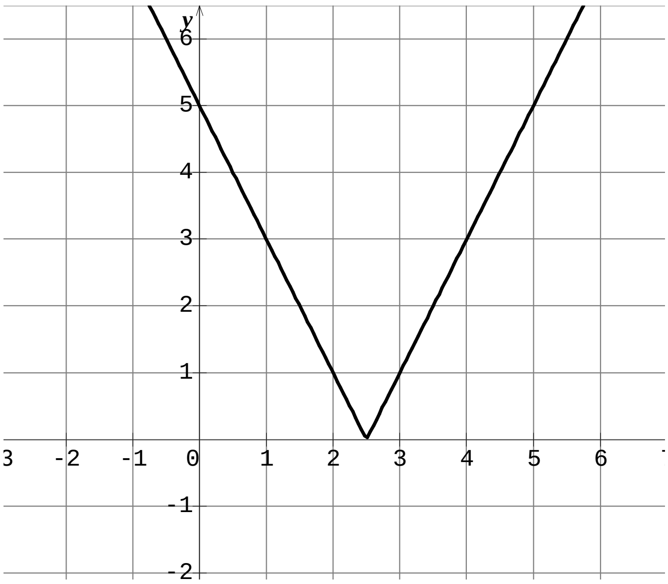
1) Si $2x - 5 \geq 0$, autrement dit si $x \geq \frac{5}{2}$, alors $f(x) = 2x - 5$.

Si $2x - 5 \leq 0$, autrement dit si $x \leq \frac{5}{2}$, alors $f(x) = -2x + 5$.

2) Sur $\left]-\infty;\frac{5}{2}\right]$, $f(x) = -2x + 5$ donc f est décroissante (fonction affine de coefficient directeur négatif).

Sur $\left[\frac{5}{2};+\infty\right[$, $f(x) = 2x - 5$ donc f est croissante (fonction affine de coefficient directeur positif).

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
Variations de f	$\searrow$	0	$\nearrow$



Exercice 7

1)

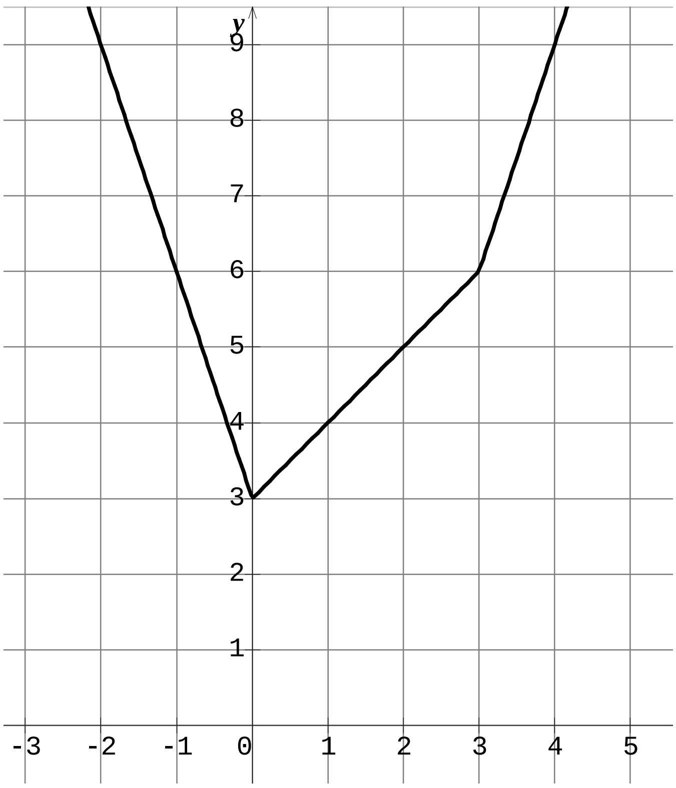
x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
Signe de x		$-$	0	$+$		$+$	
$\|x\| =$		$-x$		x		x	
Signe de $x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$\|x-3\| =$		$-x+3$		$-x+3$		$x-3$	
$f(x) =$		$2(-x)+(-x+3)$ $=-3x+3$		$2x+(-x+3)=x+3$		$2x+x-3=3x-3$	

Nous avons donc $f(x) = \begin{cases} -3x+3 \text{ si } x \leq 0 \\ x+3 \text{ si } 0 < x < 3 \\ 3x-3 \text{ si } x \geq 3 \end{cases}$

2) Sur $]-\infty;0]$, $f(x) = -3x+3$ donc f est décroissante (fonction affine de coefficient directeur négatif).
Sur $[0;3]$, $f(x) = x+3$ donc f est croissante.
Sur $[3;+\infty[$, $f(x) = 3x-3$ donc f est également croissante.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de f	↘	3	↗

3)



Exercice 8

1)

x	$-\infty$	-2		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
Signe de $x+2$	$-$	0	$+$		$+$	
$\lvert x+2 \rvert =$	$-x-2$		$x+2$		$x+2$	
Signe de $3x-4$	$-$		$-$	0	$+$	
$\lvert 3x-4 \rvert =$	$-3x+4$		$-3x+4$		$3x-4$	
$f(x) =$	$-x-2-(-3x+4)$ $= 2x-6$		$x+2-(-3x+4)$ $= 4x-2$		$x+2-(3x-4)$ $= -2x+6$	

2) Sur $]-\infty; -2]$, $f(x) = 2x-6$ donc f est croissante.

Sur $\left[-2; \frac{4}{3}\right]$, $f(x) = 4x-2$ donc f est croissante également.

Sur $\left[\frac{4}{3}; +\infty\right[$, $f(x) = -2x+6$ donc f est décroissante.

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
Variations de f	$\nearrow$	$\frac{10}{3}$	$\searrow$

3)