Cours de Limites et continuité des fonctions numériques

Niveau : 2ème bac Sc.Maths

I-Continuité en un point :

1-Définitions

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et a un élément de I.

i. $f\ est\ continue\ en a \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f = f(a)$

Si $f n'est pas\ continue\ en\ a\ on\ dit\ qu'elle est\ discontinue\ en\ a$

ii. Si f est définie sur un intervalle $[a, b[\subset \mathbb{R}$:

$$f\ est\ continue\ à\ droite\ en\ a \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f = f(a)$$

iii. ii. Et si f est définie sur un intervalle $]b, a] \subset \mathbb{R}$:

$$f\ est\ continue\ à\ gauche\ en\ a \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f = f(a)$$

2-Théorème :

$$f\ est\ continue\ en\ a \Leftrightarrow f\ est\ continue\ à\ droite\ \ et à\ gauche\ en\ a$$

Exercice d'application :

Etudier la continuité de la fonction f au point x_0 dans chacun des cas suivants :

1. $\begin{cases} f(x) = \frac{|x-1|}{x^3-1} \\ f(1) = \frac{1}{3} \end{cases} ; x_0 = 1$

2. $\begin{cases} f(x) = \frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} ; x \neq 2 \\ f(2) = \frac{9}{8} \end{cases}$

3. $\begin{cases} f(x) = x^2 E\left(\frac{1}{x}\right) ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

3-Définition de la continuité en utilisant la définition formelle de la limite :

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et a un élément de I.

$$f \text{ est continue en } a \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f = f(a)$$

$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I : |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$$

4. Prolongement d'une fonction en un point par continuité :

Exemple :

Soit $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ .on a :$D_f = \mathbb{R}^*$ et $\lim_{x \mapsto 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

On peut donc prolonger f au point 0 :

On définit la fonction $\tilde{f}$ sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} \tilde{f}(x) = \frac{\sin x}{x} ; x \neq 0 \\ \tilde{f}(0) = 1 \end{cases}$

Il est clair que $\tilde{f}$ est bien continue au point 0 donc $\tilde{f}$ est le prolongement de f par continuité en 0

Théorème :

Si f est une fonction définie au voisinage d'un point x_0 mais non définie en x_0 ; et si $\lim_{x \mapsto x_0} f(x) = l, avec l \in \mathbb{R}$;

alors la fonction $\tilde{f}$ définie sur $D_f \cup \{x_0\}$ par : $\begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x); x \neq x_0 \\ \tilde{f}(x_0) = l \end{cases}$ est le prolongement de f par continuité en a.

II-Continuité sur un intervalle réel

1-Définitions :

Soient $a \text{ et } b \text{ des réels tels que } a < b$.

i. $f \text{ est continue sur l'intervalle }]a, b[\text{ signifie que } f \text{ est continue en tout point de}]a, b[$

ii. $f \text{ est continue sur l'intervalle }]a, b] \text{ signifie que} : \begin{cases} f \text{ est continue en tout point de}]a, b[\\ \text{et } f \text{ est continue à gauche en } b \end{cases}$

iii. $f \text{ est continue sur l'intervalle} [a, b[\text{signifieque} : \begin{cases} f \text{ est continue en tout point de}]a, b[\\ \text{et } f \text{ est continue à droite en } a \end{cases}$

iv. f *est continue sur l'intervalle* $[a,b]$ *signifieque*: $\begin{cases} f \text{ est continue en tout point de}]a,b[\\ \text{et } f \text{ est continue à droite en } a \\ \text{et } f \text{ est continue à gauche en } b \end{cases}$

2-Continuité de la fonction partie entière

Activité :

Soit E la fonction partie entière. E est définie sur $\mathbb{R}$:

$$E: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto E(x)$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $E(x)$ est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x c.à.d.

$$E(x) \in \mathbb{Z} \text{ et } E(x) \leq x < E(x) + 1$$

Représenter la fonction E graphiquement et prouver qu'elle est continue sur tout intervalle $[k, k+1[, k \in \mathbb{Z}$ et est discontinue en tout point de $\mathbb{Z}$.

III- Opérations sur les fonctions continues

1- Propriétés :

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- les fonctions $|f|, \lambda f avec \lambda \in \mathbb{R}, f+g, fg$ sont continues sur I

-Si $\forall x \in I: g(x) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}, \frac{f}{g}$ sont continues sur I

- Si $\forall x \in I: f(x) \geq 0$, alors $\sqrt{f}$ est continue sur I

Preuve :

En utilisant la définition formelle de la limite, démontrer par exemple la continuité de la somme $f + g$.

2.Continuité et limite d'une fonction composée :

Propriété :

Soit l un nombre réel.

Si f est une fonction numérique telle que $\lim_{a} f = l$ et si g est une fonction numérique continue au point l alors $\lim_{a} g \circ f = g(l)$

Remarque :

Cette propriété reste valable en $+\infty$, $-\infty$, a^+ , a^-

Conséquence :

Si f est une fonction numérique continue sur un intervalle I et g est une fonction numérique continue sur un intervalle J telle que $f(I) \subset J$ alors la fonction $g \circ f$ est continue sur I

3. Continuité des fonctions de référence :

Théorèmes :

i. Toutes les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.

ii. Les fonctions : $x \longmapsto |x|$; $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

iii. Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle contenu dans son domaine de définition.

iv. La fonction $x \mapsto \tan x$ est continue sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition $D_{tan} = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

v. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$

Exemples :

Montrer que les fonctions suivantes sont continues en tout point de leurs domaines de définition :

$$f: x \longmapsto x^3 - \sqrt{1 - x^2} \;\; ; \;\; g: x \longmapsto \frac{\sqrt{x}}{|x| - 2} \;\; ; \;\; h: x \longmapsto \tan\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

IV.Image d'un intervalle par une fonction numérique.

Activités :

1) Déterminer l'image de chacun des intervalles suivants par la fonction partie entière E :

$$[-1; 2] \; ; \;]0; 1[; \; \mathbb{Z}$$

2) Déterminer : $\cos([0,2\pi[)$

3) Représenter graphiquement la fonction numérique $f: x \longmapsto \frac{x+1}{x-1}$, en déduire graphiquement les images des intervalles $]1, +\infty[$; $[-1; 1[$ et $]-\infty, 0]$ par f.

1. Théorème :(Admis)

i. L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

ii. L'image d'un segment (intervalle fermé borné) $[a, b]$ est un segment$[m, M]$ où m est le plus petit élément et M le plus grand élément de $f([a, b])$

Conséquence :

Toute fonction numérique continue sur un intervalle I est bornée et atteint ses bornes.

2-Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone :

Propriétés :

Soient a et b deux nombres réels tels que $a<b$ et f est une fonction numérique définie sur un intervalle I. On a les résultats suivants :

	Image de l'intervalle I par la fonction f	
L'intervalle I	f est strictement croissante sur I	f est strictement décroissante sur I
$[a, b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$]a, b]$	$\left]\lim\limits_{a^+} f, f(b)\right]$	$\left[f(b), \lim\limits_{a^+} f\right[$
$[a, b[$	$\left[f(a), \lim\limits_{b^-} f\right[$	$\left]\lim\limits_{b^-} f, f(a)\right]$
$]a, b[$	$\left]\lim\limits_{a^+} f, \lim\limits_{b^-} f\right[$	$\left]\lim\limits_{b^-} f, \lim\limits_{a^+} f\right[$
$]-\infty, +\infty[$	$\left]\lim\limits_{-\infty} f, \lim\limits_{+\infty} f\right[$	$\left]\lim\limits_{+\infty} f, \lim\limits_{-\infty} f\right[$
$[a, +\infty[$	$\left[f(a), \lim\limits_{+\infty} f\right[$	$\left]\lim\limits_{+\infty} f, f(a)\right]$
$]-\infty, a[$	$\left]\lim\limits_{-\infty} f, \lim\limits_{a^-} f\right[$	$\left]\lim\limits_{a^-} f, \lim\limits_{-\infty} f\right[$

Exercices d'application :

1) Etudier les variations de la fonction numérique $f: x \longmapsto \frac{3x-2}{x+1}$, puis déterminer par f les images des intervalles suivants : $]-\infty; -1[$; $[-2; 1[$, $]-1,0]$ et $]-1, +\infty[$

2) Même questions pour : $f: x \longmapsto -x^3 + 3x^2 + 1$ et les intervalles :

$$[0; 2[\, , [-1; 0], [-2; 1] \ \ et\ \mathbb{R}$$

3-Théorème des valeurs intermédiaires :

Théorème(T.V.I) :

Si f est une fonction continue sur un segment $[a, b]$ alors toute valeur k intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteinte au moins une fois c.à.d. il existe au moins un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.

Corollaire 1 :

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a, b]$ alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un unique réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$

Corollaire 2 :

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un segment $[a, b]$et si $f(a) \times f(b) \leq 0$ alors il existe un unique réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$

Remarque :

Le TVI sert à localiser (encadrer) et à calculer une approximation d'une solution de l'équation $f(x) = 0$

Interprétation graphique :

Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses.

Exercices d'application :

1) Soit la fonction numérique $f: x \longmapsto x - cosx$

a) Prouver que l'équation $f(x) = \frac{3}{2}$ admet dans l'intervalle $\left]\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right[$au moins une solution α

b) Montrer que α est unique.

2) Soit la fonction numérique $f: x \longmapsto x^3 + x + 1$

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]-1; 0[$ une unique solution β et prouver que $-1 < \beta < -\frac{1}{2}$, puis trouver un encadrement pour β d'amplitude 0.25

VI.Bijection continue :

Théorème de la bijection inverse et propriétés :

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors f est une bijection de I dans l'intervalle $f(I)$

Sa bijection réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur $f(I)$ et a le même sens de variation que f

Les courbes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ dans un repère orthonormé.

Remarque :

Si f est bijection d'un intervalle I dans un intervalle J alors pour tout $y \in J$ l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans I.

Exercice d'application :

Soit f la fonction définie sur $I =]1;+\infty[$ par $f(x) = -x^2 + 2x - 3$.

1- Montrer que f est une bijection de I vers un intervalle J qu'on déterminera puis représenter f et f^{-1} graphiquement dans le même repère orthonormé.

2- Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

VII . Fonction racine n'ième

1.Définition :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

La restriction de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $[0;+\infty[$est une bijection de $[0;+\infty[$ sur $[0;+\infty[$.

Sa bijection réciproque s'appelle fonction racine nième et se note $\sqrt[n]{}$ et définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{+2}: \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$$

On notera aussi : $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

2.Continuité et limite de la fonction $\sqrt[n]{}$

Propriété :

Soit u une fonction positive sur un intervalle I , $x_0 \in I$.

i. si u est continue sur Ialors $\sqrt[n]{u}$ est continue sur I

ii.si $\lim\limits_{x_0} u = l \in [0,+\infty[$ alors $\lim\limits_{x_0} \sqrt[n]{u} = \sqrt[n]{l}$

iii.si $\lim\limits_{x_0} u = +\infty$ alors $\lim\limits_{x_0} \sqrt[n]{u} = +\infty$

3.Opérations sur les radicaux :

Propriétés :

Pour tous a, b de $[0;+\infty[$ et pour tous n, p de $\mathbb{N}^* - \{1\}$ on a :

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \sqrt[n]{a^n} = a \quad ; \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$

$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a} \quad ; \quad \sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}$

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

$\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \quad ; \ a \neq 0 \quad ; \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}; b \neq 0$

4. Puissance rationnelle d'un nombre réel strictement positif :

a.Définition :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{Z}$.On pose pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$x^{\frac{p}{n}} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^p = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p$$

b.Limite de la fonction $x \mapsto x^r$ ou $r \in \mathbb{Q}^*$ en $+\infty$

Propriété :

Soit $r \in \mathbb{Q}^*$.On a :

Si $r > 0$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} x^r = +\infty$

Et si $r < 0$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} x^r = 0$

c.Opérations sur les puissances rationnelles

Propriétés :

Pour tous $r, r' de \mathbb{Q}$ et $a, b \ de \ \mathbb{R}_+^*$ ona :

$$a^r a^{r'} = a^{r+r'} ; \ (ab)^r = a^r b^r \ ; \ (a^r)^{r'} = a^{rr'}$$

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r} \quad ; \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r} \quad ; \ \frac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'}$$

VIII.Fonction Arctangente :

Activité :

Activité

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, par $f(x) = tanx$

Montrer que f est une bijection de I vers IR. On notera sa bijection réciproque par $Arctan$

Corrigé de l'activité

Soit f la restriction de la fonction $x \longmapsto tanx$ à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$:

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[: f(x) = tanx$$

La fonction f est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

De plus elle est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$; en effet :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[: f'(x) = 1 + tan^2x = \frac{1}{cos^2x} > 0$$

Donc, d'après le théorème de la bijection, la fonction f est une bijection de l'intervalle

$\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ vers l'intervalle :$f\left(\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right) = \left]\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} f(x), \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)\right[$

Calcul des deux limites :

On a : $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[: f(x) = tanx = \frac{sinx}{cosx}$

Et :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} sinx = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \text{ , } \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} cosx = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} sinx = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \text{ , } \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} cosx = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

On doit alors utiliser le signe de $cosx$ à droite de $-\frac{\pi}{2}$ et à gauche de $\frac{\pi}{2}$:

Puisque : $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[: cosx > 0$, alors :

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty \quad et \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$$

D'où :$f\left(\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right) =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

a.Définition :

La restriction de la fonction $x \longmapsto tanx$ à $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ vers $\mathbb{R}$.

Sa bijection réciproque s'appelle fonction arctangente, notée $arctan$, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$arctan: \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$$

$$x \longmapsto arctan\, x$$

Et on a ; $\begin{cases} y = arctan\, x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = tan\, y \\ y \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$

Quelques valeurs usuelles de $arctanx$:

On a : $tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}\ et\ \frac{\pi}{3} \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ donc $arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

De même $arctan0 = 0$; $arctan1 = \frac{\pi}{4}$; $\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$

…d'où le tableau :

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$	$\sqrt{2}-1$
$Arctanx$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$

b.Propriétés de la fonction $arctan: x \longmapsto arctanx$

i. $\forall x \in \mathbb{R}: arctan\,x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ c.à.d : $\forall x \in \mathbb{R}: -\frac{\pi}{2} < arctanx < \frac{\pi}{2}$

ii. $\forall x \in \mathbb{R}: tan(arctan\,x) = x$

et $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[: arctan(tan\,x) = x$

iii. La fonction $arctan: x \longmapsto arctanx$ est impaire c.à.d. :

$$\forall x \in \mathbb{R}: arctan(-x) = -arctanx$$

iv. La fonction $arctan: x \longmapsto arctanx$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\lim_{x\to-\infty} arctan\,x = -\frac{\pi}{2} \quad et \quad \lim_{x\to+\infty} arctan\,x = \frac{\pi}{2}$$

v. $\forall x \in \mathbb{R}^*: arctan\,x + \arctan\frac{1}{x} = \left|\begin{array}{l} \frac{\pi}{2}\ , si\ x > 0 \\ -\frac{\pi}{2}\ , si\ x < 0 \end{array}\right.$

vi.et on a : $\lim_{x\to 0}\frac{arctan\ x}{x} = 1$

Quelques démonstrations :

vi. en posant $t = arctanx$ on a $tant = x$,d'où : $\lim_{x\to0}\frac{arctan\ x}{x} = \lim_{t\to0}\frac{t}{tant} = 1$

iii. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons :$y = \arctan(-x)$.On a alors :$y \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et :

$$y = \arctan(-x) \Leftrightarrow tany = -x \Leftrightarrow -tany = x \Leftrightarrow \tan(-y) = x$$

Or : $y \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow -y \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ donc : $-y = arctanx$ donc $y = -arctanx$

Et comme $y = \arctan(-x)$ alors $\arctan(-x) = -arctanx$ c.à.d. que la fonction $arctan: x \longmapsto arctanx$ est impaire.

ii. Application des deux formules $\forall x \in \mathbb{R}: fof^{-1}(x) = x$ et $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[: f^{-1}of(x) = x$

Où $f^{-1} = \arctan$ et f la restriction de la fonction tan à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

v. en exercice

c.Représentation graphique de la fonction *Arctan*

La courbe de la fonction $arctan: x \longmapsto arctanx$ est la symétrique de celle de la restriction de la fonction $x \longmapsto tanx$ à $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par rapport à la 1ère bissectrice $(y = x)$ du repère orthonormé.