Dérivabilité –Primitives d'une fonction continue

Théorème de Rolle - Théorème des accroissements finis

I-Dérivabilité et continuité en un point :

Théorème :

- Si f est dérivable en x_0 alors la fonction f est continue en x_0.
- Si f est dérivable sur un intervalle I alors la fonction f est continue sur I.

Attention !

La réciproque de ce théorème est fausse :

Contre-exemple :

La fonction $f: x \longmapsto |x|$ est continue en 0 et non dérivable en 0.

$(f'_d(0) = 1 \; et \; f'_g(0) = -1)$

Démonstration :

Supposons que f est dérivable en x_0 donc : $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l \; avec \; l \in \mathbb{R}$

Posons : $\varepsilon(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - l$ .On a : $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ et :

$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h)$. D'où : $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$

c.à.d. f est continue en x_0.

II-Dérivée de la composée de deux fonctions dérivables

Théorème

- Si f est dérivable en $x_0 g$ est dérivable en $f(x_0)$ alors la composée $g \circ f$ est dérivable en x_0 et on a : $(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times g'[f(x_0)]$

- Si f est dérivable sur un intervalle I et g est dérivable sur $f(I)$ alors la composée $g \circ f$ est dérivable sur et on a : $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$

III-Dérivée de la fonction réciproque d'une fonction dérivable

1-Théorème :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et x_0 un élément de I.

1- Si f est une fonction dérivable en un point x_0 et $f'(x_0) \neq 0$ alors la fonction réciproquef^{-1} de f est dérivable au point $y_0 = f(x_0)$ et on a :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

2-Sif est une fonction dérivable sur intervalle Ide $\mathbb{R}$ et si f' ne s'annule pas sur I alors la fonction réciproquef^{-1} de f est dérivable sur l'intervalle $J = f(I)$ et on a :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Démonstration :

Supposons que dérivable en$x_0$et $f'(x_0) \neq 0$;et étudions la limite : $\lim\limits_{y \to y_0} \frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0}$

Posons : $x = f^{-1}(y)$.

Comme f^{-1} est continue en y_0 alors $\lim\limits_{y \to y_0} f(y) = f(y_0) = x_0$ d'où : $\lim\limits_{y \to y_0} \frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$ *Cqfd.*

Exemple résolu :

Enoncé :

1) Montrer que la fonction $f: x \longmapsto 2x - x^2$ est une bijection de $]1; +\infty[$vers un intervalle J à déterminer.

2) Montrer que sa réciproque f^{-1} est dérivable sur J

3) Calculer $f(2)$ et calculer $(f^{-1})'(0)$

4) Calculer $(f^{-1})'(-3)$

***Solutions* :**

1) La fonction $f: x \mapsto 2x - x^2$ est une bijection de $]1; +\infty[$vers $J =]-\infty; -1[$

2) Et f est dérivable sur $1; +\infty[$ et $\forall x \in]1; +\infty[: f'(x) = 2(1-x) \neq 0$

Donc sa réciproque f^{-1} est dérivable sur $]-\infty; -1[$.

3) $f(2) = 0$ et $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(2)} = -\frac{1}{2}$

4) On a : $(f^{-1})'(-3) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(-3)}$.On doit calculer $f^{-1}(-3)$

$f^{-1}(-3) = x \Leftrightarrow f(x) = -3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x = 3 ou x = -1)$;($\Delta = 16$)

Or $-1 \notin]1; +\infty[$ donc $f^{-1}(-3) = 3$ d'où $(f^{-1})'(-3) = \frac{1}{f'(3)} = -\frac{1}{4}$

2-Dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ et conséquences :

Propriétés :

Soient $n \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$ et $r \in \mathbb{Q}^*$

-la fonction $f : x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on a :

$$\forall x > 0: f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x}^{n-1}}$$

-Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur intervalle Ide $\mathbb{R}$ alors les fonctions $\sqrt[n]{u}$ *et* u^r sont dérivables sur I et on a : $(\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u}^{n-1}}$ *et* $(u^r)' = ru'u^{r-1}$

Démonstration :

Soit $y_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et $x_0 = \sqrt[n]{y_0} \in \mathbb{R}^{+*}$.la fonction $f: x \mapsto \sqrt[n]{x}$est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = nx_0^{n-1} \neq 0$donc la fonction $f^{-1}: y \mapsto \sqrt[n]{y}$ est dérivable en y_0 et on a : $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{nx_0^{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{y_0}^{n-1}} = \frac{1}{n} {y_0}^{\frac{1}{n}-1}$

3- Dérivée de la fonction Arctangente

Propriétés

-La fonction $x \mapsto arctan\, x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}: arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

-Si u est une fonction dérivable sur intervalle I alors la fonction $f: x \mapsto arctan[u(x)]$ est dérivable sur I et on a : $\forall x \in \mathbb{R}: f'(x) = \frac{u'(x)}{1+[u(x)]^2}$

Démonstration :

Soit $y_0 \in \mathbb{R}$ et $x_0 = arctan\, y_0 \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.la fonction $f: x \mapsto tan\, x$est dérivable en x_0 et $tan' x_0 = 1 + tan^2 x_0 = \frac{1}{cos^2 x_0} \neq 0$donc la fonction $f^{-1}: y \mapsto arctan\, y$ est dérivable en y_0 et on a :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{1 + tan^2 x_0} = \frac{1}{1 + y_0^2}$$

Exercice :

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*: arctan\, x + arctan \frac{1}{x} = sgn(x)\frac{\pi}{2}$

Avec : $sgn(x) = \begin{vmatrix} +1 \; si \; x > 0 \\ -1 \; si \; x < 0 \end{vmatrix}$

(On considérera la fonction $g : x \longmapsto arctan\, x + arctan\frac{1}{x}$ et on montrera que c'est une fonction dérivable sur les 2 intervalles $]-\infty, 0[\; et \;]0, +\infty[$ de dérivée nulle et on calculera la constante sur chaque intervalle en utilisant des valeurs bien choisies)

IV-Primitives d'une fonction continue

1-Définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

Dire qu'une fonction F est une primitive de f sur I signifie que :

- F est dérivable sur I
- et $\forall x \in I: F'(x) = f(x)$

Exercices :

1-Donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions :

$$f: x \mapsto 3 - 2x; g: x \mapsto sin\, x\, ; h: x \mapsto x^2 + 3\, cos\, x$$

2-Montrer que la fonction $F: x \mapsto \frac{2}{\sqrt{3}} arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{x^2+x+1}$

2-Théorème :(admis)

Toute fonction continue sur un intervalle Iadmet des primitives sur I

3.Théorème *:*

Soit $f$est une fonction continue sur un intervalle I.
Si F est une primitive de f sur I, alors f admet une infinité de primitives sur I.Toute autre primitive de f sur I est définie par :

$$G(x) = F(x) + k \text{ où } k \text{ est une constante réelle.}$$

En particulier, si $x_0 \in I$ *et* y_0 est un réel quelconque, alors il existe une unique primitive G de $f$sur I telle que : $G(x_0)=y_0$

Exercice :

Trouver la primitive F de la fonction $f: x \mapsto 2x - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$-1 sur $]0, +\infty[$ qui s'annule au point $x_0 = 1$

4- Propriétés :

Soient $a; b$ deux nombres réels, et I un intervalle.

Si f et g sont deux fonctions continues sur I admettant successivement pour primitives F *et* G sur I *;* alors la fonction $aF + bG$ est une primitive de la fonction $af + bg$

Exemple :

Une primitive de la fonction $f: x \longmapsto 3cosx - 2sinx$ sur $\mathbb{R}$ est $F:: x \longmapsto 3sinx + 2cosx$

5-Primitives et dérivées

Soit u une fonction dérivable sur I ;r $\in \mathbb{Q}$

Fonction f	$u'u^r$	$\frac{u'}{u^2}$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$\frac{u'}{1+u^2}$	$\boldsymbol{u'.(v' \circ u)}$	$\boldsymbol{u'(ax+b)}$
Primitives de f	$\frac{u^{r+1}}{r+1} + c$	$-\frac{1}{u} + c$	$2\sqrt{u} + c$	$Arc\tan u$	$v \circ u$	$\frac{1}{a}u'(ax+b)$
Conditions	(1)	$u \neq 0$	$u > 0$		(2)	(3)

(1) : $u \neq 0$ si $\boldsymbol{r \neq -1}$ **;** $u > 0$ si $r \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$

(2) : *v est une fonction dérivable sur un intervalle J tel que* $u(I) \subset J$

(3) : $\forall x \in I : ax + b \in I$

Exemples :

Donner une primitive de chaque fonction :

$$a.\ f : x \mapsto \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x} - 1\right)^9 \ sur\ \mathbb{R}^{+*} \qquad b.\ f : x \mapsto x\sqrt[3]{x^2 - 1}\ sur\ 1; +\infty[$$

$$c.\ f : x \mapsto \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}\ sur\ \mathbb{R} \qquad d.\ f : x \mapsto \sin 2x - \cos 3x + \tan^2 4x$$

5-Primitives des fonctions usuelles :

Soit $r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\}$; $a \in \mathbb{R}^*$.F est une primitive d'une fonction f sur un *intervalle I convenable.*

$f(x)$	0	λ	x^r	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^r}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\cos x$	$\sin x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$F(x)$	c	λx	$\frac{x^{r+1}}{r+1}$	$-\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{(r-1)x^{r-1}}$	$2\sqrt{x}$	$Arc\tan x$	$\sin x$	$-\cos x$	$\tan x$
I	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	(1)	$n \geq 2$	$\mathbb{R}^{*+} ou \mathbb{R}^{*-}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	(2)

(1) : L'intervalle I est $\mathbb{R}$ *si* $r \in IN^*$; $\mathbb{R}_+^*$ *ou*$\mathbb{R}_-^*$ *si* $r \in \mathbb{Z}^{-*} - \{-1\}$;$\mathbb{R}_+^*$ *Si* $r \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$

(2) :$I = \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$

V-Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

1-Théorème de Rolle :

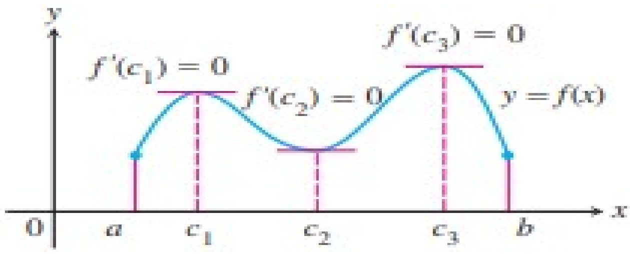
Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction numérique.

$$\text{Si : } \begin{cases} f est continue sur [a, b] \\ f est dérivable sur]a, b[\\ f(a) = f(b) \end{cases} \quad \text{alors} \quad \exists c \in]a, b[: f'(c) = 0$$

Interprétation graphique :

C_f admet au moins une tangente horizontale entre deux points d'ordonnées égales.

Le nombre c pour lequel $f'(c) = 0$ n'est pas nécessairement unique.



Preuve :

Si $\forall x \in [a,b]: f(x) = f(a) = f(b)$ alors $\forall x \in]a,b[: f'(x) = 0$

Sinon $f([a,b]) = [m,M]$car f est$continuesur[a,b]$ avec $m \neq f(a) ou M \neq f(a)$.

Par exemple $m \neq f(a)$.On a donc $\exists c \in]a,b[: f(c) = m$

Or f est dérivable en *c*. Or m est un minimum de *f* donc : $f'(c) = 0$

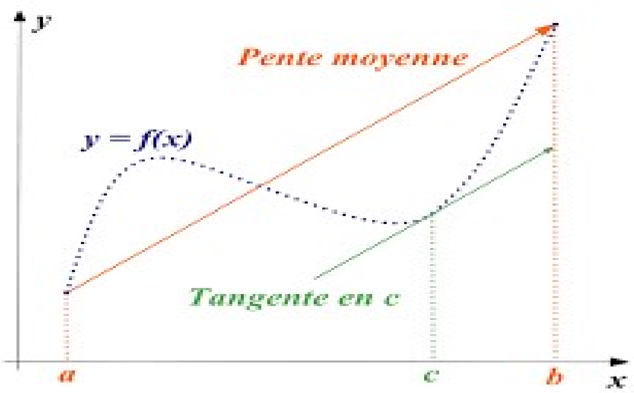
*2- **Théorème des accroissements finis (TAF)***

Soient *a* et *b* deux réels tels que *a* < *b* et *f* une fonction numérique.

Si : $\begin{cases} f est continue sur [a,b] \\ f est dérivable sur]a,b[\end{cases}$ alors $\exists c \in]a,b[: f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$

Interprétation graphique :

Étant donné une corde reliant deux points$A(a, f(a)), B(b, f(b))$ sur le graphe de f, on peut trouver entre A et B une tangente au graphe qui est parallèle à la corde $[A,B]$ de coefficient directeur : $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$



Preuve :

Posons : $\phi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.On a ϕ est continue sur [a,b] , dérivable sur]a,b[et $\phi(a) = \phi(b)$ donc d'après le th.de Rolle :

$\exists c \in]a,b[: \phi'(c) = 0$.etc…

3-Inégalité des accroissements finis :

Théorèmes :

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$.

- *S'il existe m et M des réels tels que :*

  $\forall x \in]a,b[, m \leq f'(x) \leq M$ *alors* : $m \leq f(b) - f(a) \leq M$

- *Si k est un réel positif tel que :*

  $\forall x \in]a,b[, |f'(x)| \leq k$ *alors* $|f(b) - f(a)| \leq k\,|b-a|$.

  (L'hypothèse $a < b$ dans ce cas n'est pas nécessaire)

  *(*La fonction est alors appelée fonction lipschitzienne de rapport k, et dans le cas où $0 \leq k < 1$ elle est contractante)

4-Monotonie d'une fonction numérique et dérivabilité :

Théorème :

Soit *f* une fonction dérivable sur un intervalle *I* de *IR*. On a :

- (f *est constante sur* I) $\Leftrightarrow$ ($\forall x \in I : f'(x) = 0$)
- (f *est croissante sur* I) $\Leftrightarrow$ ($\forall x \in I : f'(x) \geq 0$)

Preuve : *Utiliser TAF.*

Remarques :

- ($\forall x \in I : f'(x) > 0$) $\Rightarrow$ (f *est strictement croissante sur* I)
- *La fonction f est strictement croissante sur un intervalle I si et seulement si f' est strictement positive sur I sauf éventuellement en un **nombre fini** d'éléments de I où elle s'annule.*