EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES DU 1^{er} et $2^{ème}$ ordre

Niveau : Bac Sciences Mathématiques

Activités :

Trouver toutes les fonctions numériques f à une variable réelle x dans chacune des conditions suivantes :

1) $f'(x) = 0$ 2) $f''(x) = 0$

3) $f'(x) = e^x - 1 + x$ 4) $\frac{f'(x)}{(f(x))^2} = \frac{1}{x}$

1. Définition :

- Une **équation différentielle** d'ordre n d'inconnue y , $n \in \mathbb{N}^*$ est une relation du type : $f(x, y, y', y^{(2)} \ldots, y^{(n)}) = 0$; où y est une fonction de x ; dont laquelle apparaît au moins une dérivée successive de y :

$$y', y^{(2)} \ldots, y^{(n)}$$

- *Intégrer* ou *résoudre* une équation différentielle c'est déterminer toutes les fonctions solutions sur un intervalle n fois dérivables sur cet intervalle.

Exemples :

$$y + xy' = 0;\ y=0;\ y^{(3)}-3xy + 2y' = 0\ ;\ y^2 = y' \ldots$$

2. Equations différentielle linéaire du 1^{er} ordre du type $y' = ay + b$

-L'équation différentielle $y' = ay$ (1) ou a est un réel fixé admet pour solutions, sur $\mathbb{R}$, la famille des fonctions f_λ définies par :

$$f_\lambda(x) = \lambda e^{ax} \quad , \ \lambda \in \mathbb{R} \text{ et ce sont les seules.}$$

- L'équation différentielle $y' = ay + b$ (2) ou a est un réel fixé admet pour solutions, sur $\mathbb{R}$, la famille des fonctions f_λ définies par :

$$f_\lambda(x) = \lambda e^{ax} - \frac{b}{a} \quad , \ \lambda \in \mathbb{R} \text{ et ce sont les seules.}$$

Démonstration :

Soit l'équation différentielle $y' = ay$ (1)

La fonction nulle est bien une solution de (1)

Soit f une solution de (1) ne s'annulant pas sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

f est dérivable sur I donc elle est continue sur I ;

Donc f prendra un signe constant sur I

On a pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} f'(x) = af(x) &\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = a \\ &\Leftrightarrow ln|f(x)| = ax + b \text{ , } b \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow |f(x)| = e^b e^{ax} \\ &\Leftrightarrow f(x) = \lambda e^{ax} \text{ } avec \text{ } \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

car f prend un signe constant sur I

Montrons que λ est une constante :

Posons $g(x) = \frac{f(x)}{e^{ax}}$

Donc $f(x) = g(x)e^{ax} \Longrightarrow f'(x) = g'(x)e^{ax} + ag(x)e^{ax}$

Or $f'(x) = af(x) \Longrightarrow g'(x)e^{ax} + ag(x)e^{ax} = ag(x)e^{ax}$

$\Longrightarrow g'(x) = 0$

Donc la fonction g est constante.

Exercices d'application :

1-Résoudre les équations différentielles suivantes :

(1) : $2y' + yln2 = 0$

(2) : $3y' - 4y - 2 = 0$

2-Déterminer la solution f de (2) sachant que la courbe de f admet au point d'abscisse 0 une tangente de coefficient directeur égal à -1

3. Equations différentielle linéaire du 2ème ordre

<u>Théorème (Admis)</u>

On considère *l'équation différentielle :*

$$ay'' + by' + cy = 0; (a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$$

Pour résoudre une telle équation on forme d'abord l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

Trois cas peuvent se produire :

- cette équation admet deux solutions réelles distinctes $(\Delta > 0)$ $r_1 \; et \; r_2$ alors les solutions sont les fonctions f définie sur $\mathbb{R}$ par :

  $$f(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$$

  où $\alpha \; et \; \beta$ et sont deux réels arbitraires.

- cette équation admet une solution double réelle : r_0 $(\Delta \; nul)$ alors les solutions sont les fonctions *f* définie sur $\mathbb{R}$ par :

  $$f(x) = (\alpha x + \beta)e^{r_0 x}$$

  où $\alpha \; et \; \beta$ et sont deux réels arbitraires.

- cette équation admet deux solutions ***complexes*** conjuguées $r_1 \; et \; r_2$ $(\Delta < 0)$ c.à.d. : $r_1 = p + iq; r_2 = \overline{r_1}; avec \; (p, q) \in \mathbb{R}^2$; alors les solutions sont les fonctions *f* définie sur $\mathbb{R}$ par :

  $$f(x) = e^{px}(\alpha \cos q \, x + \beta \sin q \, x) ,$$

  où $\alpha \; et \; \beta$ et sont deux réels arbitraires.

Cas particulier :

Les solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ avec $\omega \in \mathbb{R}$ sont les fonctions f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \alpha \cos q\, x + \beta \sin q\, x\ ,$$

où $\alpha\ et\ \beta$ et sont deux réels arbitraires.

Remarque :

Les solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ avec $\omega \in \mathbb{R}$ sont aussi les fonctions f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = A sin(\omega x + \varphi)\ , \quad ou\ encore \quad f(x) = A cos(\omega x + \varphi)$$

où $A\ et\ \varphi$ et sont deux réels arbitraires.

Exercices d'application :

1-Résoudre les équations différentielles suivantes :

$(1) : 2y'' - 3y' - 2y = 0$

$(2) : 3y'' + 2y' + y = 0$

$(3) : y'' + 6y' + 9y = 0$

(4) : $y'' + 16y = 0$

(5) : $y^{(3)} + 3y'' + 2y' = 0$

(6) : $y'' = y$

2-2-Déterminer les fonctions :

a) f solution de (1) telle que : $f(0) = 1\ \ et\ \ f'(0) = -1$

b) g solution de (2) telle que : $g(0) = g'(0) = 1$