Etude des fonctions numériques (Résumé)

Terminale Sciences Mathématiques

Dans tout ce qui suit f une fonction numérique d'une variable réelle x et C_f sa courbe représentative *dans un repère cartésien* $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ *du plan.*

I. Tangentes et demi-tangentes à d'une courbe représentative d'une fonction *numérique*

- Si f est dérivable en un point a alors la courbe de f admet une tangente au point $A(a, f(a))$ d'équation réduite :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

- Si f est dérivable à droite en a alors la courbe de f admet une demi-tangente au point $A(a, f(a))$ d'équation réduite :

$$\begin{cases} y = f'_d(a)(x-a) + f(a) \\ x \geq a \end{cases}$$

- Si f est dérivable à gauche en a alors la courbe de f admet une demi-tangente à au point $A(a, f(a))$ d'équation réduite :

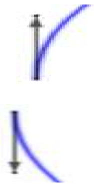
$$\begin{cases} y = f'_g(a)(x-a) + f(a) \\ x \leq a \end{cases}$$

-Si $\boldsymbol{f'(a) = 0}$ alors la courbe de f admet au point $A(a, f(a))$ une tangente (**horizontale**) parallèle à l'axe des abscisses (d'équation $y = f(a)$)

-Si Une des limites $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est infinie ($\pm\infty$) alors la courbe de f admet au point $A(a, f(a))$ une **demi-tangente verticale** (parallèle à l'axe des ordonnées) d'équation :

$\begin{cases} x = a \\ y \geq f(a) \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = a \\ y \leq f(a) \end{cases}$ et définie par :

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \begin{cases} +\infty \ldots\ldots\ldots \ dirigée\ vers\ le\ haut\ \ \uparrow\curvearrowright \\ -\infty \ldots\ldots\ldots dirigée\ vers\ le\ bas\ \ \downarrow\hookrightarrow \end{cases}$$



$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \begin{cases} -\infty \ldots\ldots\ldots dirigée\ vers\ le\ haut\ \ \curvearrowleft\uparrow \\ +\infty \ldots\ldots\ldots dirigée\ vers\ le\ bas\ \ \hookleftarrow\downarrow \end{cases}$$

II. Etude de la nature des branches infinies **d'une courbe représentative *Cf* d'une fonction f**

1. Définition

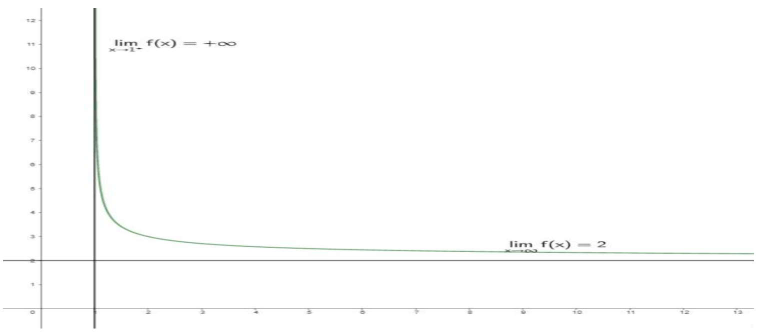
Une branche infinie d'une courbe représentative C_f d'une fonction f apparaît dès lors que l'une au moins des coordonnées d'un point $M(x, y = f(x))$ de C_f , x ou $y = f(x)$ tend vers l'infini.

2. Plan d'étude

Soient a, b des réels. On a les ***propriétés*** *suivantes :*

- $\displaystyle \lim_{x \to a \ ou\ a^{\pm}} f = \pm\infty \Leftrightarrow \begin{pmatrix} la\ droite\ d'équation\ x = a \\ est\ une\ asymptote\ \boldsymbol{verticale} \\ à\ la\ courbe\ de\ f \\ (parallèle\ à\ l'axe\ des\ \boldsymbol{ordonnées}\ y'y) \end{pmatrix}$

- $\displaystyle \lim_{x \to \pm\infty} f = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} la\ droite\ d'équation\ y = b \\ est\ asymptote\ \boldsymbol{horizontale} \\ à\ la\ courbe\ de\ f \\ (parallèle\ à\ l'axe\ des\ \boldsymbol{abscisses}\ x'x\ ) \end{pmatrix}$



❖ *Si* $\lim\limits_{x \to +\infty} f = \pm\infty$ *; on calcule* $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ ***(même étude si x tend vers*** $-\infty$***)***

<table>
<tr><td rowspan="4">$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} =$</td><td>$\pm\infty$</td><td colspan="3">Cf admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées (ou encore l'axe des ordonnées est une direction asymptotique pour Cf)</td></tr>
<tr><td>0</td><td colspan="3">Cf admet une branche parabolique suivant l'axe des abscisses (ou encore l'axe des abscisses est une direction asymptotique pour Cf)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\boldsymbol{a \neq 0}$</td><td rowspan="2">$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - ax) =$</td><td>$\pm\infty$</td><td>Cf admet une branche parabolique de direction la droite d'équation y=ax</td></tr>
<tr><td>b</td><td>la droite d'équation y=ax+b est une asymptote (oblique) à la courbe de f</td></tr>
</table>

Et on a : si la limite de f est infinie en $+\infty$*, **la propriété** :*

$$\begin{pmatrix} \text{La droite d'équation y=ax+b} \\ \text{est une asymptote à la courbe de } f \text{ en } +\infty \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$$

Remarque :

Si a $\neq$ 0 l'asymptote d'équation $y=ax+b$ est dite une asymptote oblique à C_f. (Non parallèle aux axes de coordonnées)

3. Position relative d'une courbe d'une fonction f par rapport à une droite (Δ) :

Pour étudier la position relative d'une courbe d'une fonction f par rapport à une droite (Δ) d'équation : $y = ax + b$ *,il suffit d'étudier le signe de :*

$$f(x) - (ax + b)$$

III. Concavité d'une courbe de fonction – Points d'inflexion d'une courbe

1. Définitions

Soit f une fonction *dérivable* sur un intervalle ouvert I et $A(x_0, f(x_0))$ un point de C_f.

- La courbe C_f est « convexe» ou a une concavité dirigée vers les ordonnées positives si et seulement si C_f est au-dessus de chacune de ses tangentes
- La courbe C_f est « concave » ou a une concavité dirigée vers les ordonnées négatives si et seulement si sa C_f est en dessous de chacune de ses tangentes.
- Le point $A(x_0, f(x_0))$ est dit un point d'inflexion de C_f signifie que la courbe C_f change de concavité en A, c.à.d. la tangente en A traverse C_f en A.

2. Théorème

Si f est une fonction *deux fois dérivable* sur un intervalle ouvert I alors :

- $\begin{pmatrix} C_f \text{ est convexe} \\ \textbf{ou } C_f \textit{ a une concavité dirigée} \\ \textit{vers les ordonnées positives} \end{pmatrix} \Leftrightarrow (\, \forall x \in I : f''(x) \geq 0 \,)$

- $\begin{pmatrix} C_f \text{ est concave} \\ \textbf{ou } C_f \textit{ a une concavité dirigée} \\ \textit{vers les ordonnées négatives} \end{pmatrix} \Leftrightarrow (\, \forall x \in I : f''(x) \leq 0 \,)$
- $\begin{pmatrix} \text{Le point } A(x_0, f(x_0)) \text{ est} \\ \text{un point d'inflexion de } C_f \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} f'' \text{ s'annule en } x_0 \\ \text{et change de signe en } x_0 \end{pmatrix}$

IV. Eléments de symétrie :

Théorèmes :

-Dans un repère orthogonal, La droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de *Cf si* et seulement si :

$$\forall x \in D_f : \; 2a - x \in D_f \quad et \quad f(2a - x) = f(x)$$

ou encore :

$$\forall x \in D_f : a + x \in D_f, a - x \in D_f \quad et \quad f(a+x) = f(a-x)$$

-Dans un repère *cartésien*, le point $\Omega(a, b)$ est un centre de symétrie de *Cf si et seulement si :*

$$\forall x \in D_f : 2a - x \in D_f \ et \quad f(2a - x) = 2b - f(x)$$

ou encore

$$\forall x \in D_f : a + x \in D_f, a - x \in D_f \quad et \quad f(a+x) + f(a-x) = 2b$$

V.Fonction périodique :

1.Définition :

On dit qu'une fonction numérique f est périodique s'il existe un réel $T > 0$ tel que *:*

$$\left(\forall x \in \mathbb{R} : x \in D_f \Leftrightarrow x + T \in D_f\right) et \left(\forall x \in D_f : f(x+T) = f(x)\right)$$

2.Interprétation graphique :

Propriété :

Soit f une fonction numérique est périodique de période T et C_0 sa courbe représentative sur *l'ensemble* $D_0 = [a, a+T[\cap D_f$.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on désigne par C_n la courbe représentative *de* f sur *l'ensemble* $D_n = [a + nT, a + (n+1)T[\cap D_f$ *et on a :*

C_n est l'image de C_0 par la translation de vecteur $nT\vec{\imath}$, *et on a :*

$$Cf = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} C_n$$