Fonctions exponentielles

Niveau :Bac Sciences Mathématiques

I. Fonction exponentielle népérienne

1-Définitions :

La fonction exponentielle népérienne est la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien. Elle est notée exp et définie par :

$$\begin{array}{llll} exp: & \mathbb{R} & \longrightarrow &]0,+\infty[\\ & x & \longmapsto & exp(x) = e^x \end{array}$$

2-Propriétés :

- La fonction $exp: x \longmapsto e^x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^{+*}$et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^{+*}: e^x = y \Leftrightarrow x = ln\, y$$

- La fonction exp est définie continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad e^x > 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad ln\, e^x = x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}: \quad e^{ln} \quad = x$$

3-Propriétés algébriques :

Pour tous x, y de $\mathbb{R}$ et pour tout $r \in \mathbb{Q}$ on a :

$$e^{x+y} = e^x e^y \quad , \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad , \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \quad , \quad e^{rx} = (e^x)^r$$

Preuve :

Appliquer ln aux 2 membres d'une égalité.

Exercices d'application :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

1) $e^{2x-x^2} \geq 1$

2) $3e^x - e^{-x} = 2$

3) $\sqrt{1 - e^{-2x}} \leq \frac{1}{2}$

4) $e^{x^3}\left(e^{x^2}\right)^3 = e^x$

4. Limites usuelles de la fonction $exp: x \mapsto e^x$

Propriétés :

On a les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0 \quad , n \in \mathbb{N}^*$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad , n \in \mathbb{N}^*$
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{ax} - 1}{x} = a \quad , a \in \mathbb{R}^*$

Exercices d'application :

Etudier les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x + e^{-2x} - e^{3x})$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x + e^{-2x} - e^{3x})$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - e^x)$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2 - x + 1}$

5) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 2x^2 - 2)\ e^x$

6) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{-x} - e^{3x}}{x}$

7) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x}$

8) $\lim\limits_{x \to 1^-} e^{\frac{x}{x-1}}$

5-Dérivée de la fonction $exp: x \longmapsto e^x$ et conséquences

Propriétés :

-La fonction $exp: x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}: exp'(x) = e^x$$

-Si $u : x \mapsto u(x)$ est une fonction dérivable sur un intervalle I , alors :

* la fonction $\varphi : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I de dérivée :

$$\varphi'(x) = u'(x)e^{u(x)}$$

* Les primitives de la fonction $\psi : x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ sont les fonctions $x \mapsto e^{u(x)} + \lambda$ où λ est une constante réelle.

Exercices d'application :

1) Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-e^{x}}}$ est dérivable sur son intervalle de définition et calculer sa dérivée.

2) Donner une primitive de la fonction numérique f sur l'intervalle I :

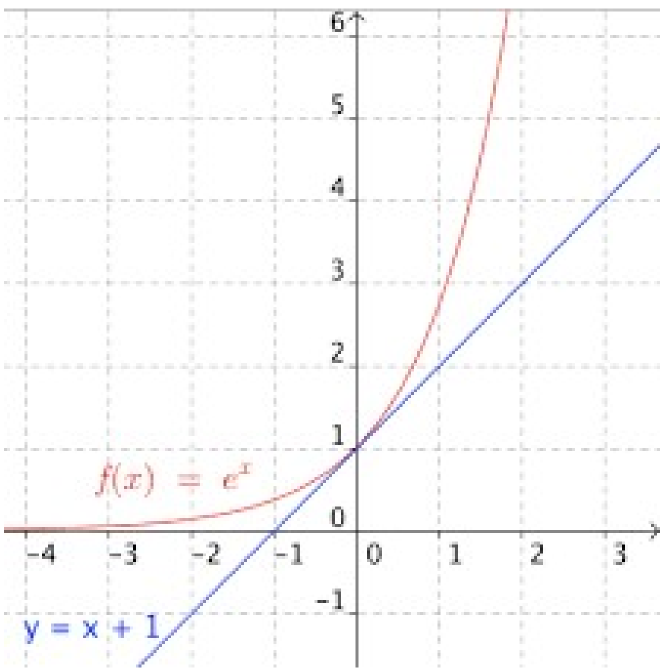
a) $f(x) = e^{-x} - e^{x} + e^{2x} - e^{\frac{x}{2}}, I = \mathbb{R}$

b) $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$,$I =]0, +\infty[$

c) $f(x) = \frac{e^{x}}{1+e^{x}}$, $I = \mathbb{R}$

6. Représentation graphique de la fonction $exp: x \longmapsto e^{x}$

Dans un repère orthonormé la courbe représentative de la fonction $exp: x \mapsto e^{x}$ est le symétrique de celle de la fonction $ln: x \mapsto ln\,(x)$ par rapport à la 1ère bissectrice du repère. (Droite d'équation $y = x$)



II. Fonction exponentielle de base a

Soit $a \in]0;+\infty[- \{1\}$

1.Définition et propriété :

La fonction exponentielle de base a est la bijection réciproque de la fonction $log_a : x \mapsto log_a = \frac{lnx}{lna}$

Elle est notée exp_a et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad exp_a(x) = a^x = e^{x\ln a}$$

Preuve :

$$\begin{aligned} exp_a(x) = y &\Leftrightarrow log_a(y) = x \\ &\Leftrightarrow \frac{lny}{lna} = x \\ &\Leftrightarrow lny = xlna \\ &\Leftrightarrow y = e^{x\ln a} \end{aligned}$$

D'où : $a^x = e^{x\ln a}$

N.B : $\forall x \in \mathbb{R}: \quad 1^x = 1$

2.Limites de a^x :

Comme $a^x = e^{x\ln a}$ alors :

Si $a > 1$ alors $lna > 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$

Si $0 < a < 1$ alors $lna < 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$

3.Les 7 Formes indéterminées :

$$+\infty - (+\infty) \quad ; \quad 0 \times \infty \quad ; \quad \frac{\infty}{\infty} \quad ; \quad \frac{0}{0} \quad ; \quad \infty^0 \quad ; \quad 0^0 \quad ; \quad 1^\infty$$

Exercices d'application :

Etudier les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^x$
2) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x$
3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

4. Dérivée et monotonie de la fonction $exp_a : x \mapsto a^x$

Propriété :

- La fonction $exp_a : x \mapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad exp'_a\,(x) = (\ln a)a^x$$

- La fonction $exp_a : x \mapsto a^x$ est :

  - strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si $a > 1$

  - et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ si $0 < a < 1$

Propriétés algébriques :

Pour tous réels a, b strictement positifs et pour tous réels x, y on a :

$$(ab)^x = a^x b^x \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} \quad , \quad (a^x)^y = a^{xy}$$

Preuve :

- Le cas $a = b = 1$ est trivial
- Si $a > 0$ *et* $a \neq 1$ et $b > 0$ *et* $b \neq 1$ alors

$$(ab)^x = e^{x\ln(ab)} = e^{x\ln a + x\ln b} = e^{x\ln a}.e^{x\ln b} = a^x b^x$$

Idem pour les autres relations.

Exercices d'application :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $3^{x+1} = 5^x$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^{\,x}$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $2^x + 2^{-x} < \frac{5}{2}$

-