L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

Niveau : Bac Sciences Mathématiques.

Activités :

On cherche à résoudre l'équation de Raphaël Bombelli

$$(E) : x^3 = 15x + 4$$

1) Montrer que l'équation (E) admet au moins une solution réelle.

2) On pose :

$$x = u + v \text{ avec } uv = 5$$

a) Vérifier que : $u^3 + v^3 = 4$

b) Montrer que u^3 et v^3 *sont les solutions de l'équation :*

$$(E') : z^2 - 4z + 125 = 0$$

c) On suppose qu'il existe un nombre non réel noté i *tel que :*

$$i^2 = -1$$

i. *Ecrire le discriminant de l'équation (E') sous forme d'un carré puis trouver les solutions z_1 et z_2 de l'équation (E') en fonction du nombre i*

ii. *Calculer i^3 puis $(2+i)^3$ et $(2-i)^3$*

iii. *En déduire une solution de l'équation (E)*

I. Présentation de l'ensemble $\mathbb{C}$

1. Théorème (admis)

Il existe un ensemble, l'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, tel que :

i. $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ;

ii. $\mathbb{C}$ est muni d'une addition, d'une multiplication qui possèdent les mêmes règles de calcul que dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels

iii. il existe, dans $\mathbb{C}$, un nombre i tel que $i^2 = -1$

iv. tout nombre complexe z s'écrit de façon unique sous la forme dite *algébrique* $z = a + ib$, où a et b sont des nombres réels notés :

$a = Re(z)$: *partie réelle de z*

et $b = Im(z)$: *partie imaginaire de z*

2.Définition :

Un nombre complexe z est un imaginaire pur signifie que $Re(z) = 0$ c.à.d. : $z = ib$ avec b un nombre réel.

L'ensemble des nombres complexes imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$

Remarques :

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(z) = 0$$

$$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow Re(z) = 0$$

3.Propriétés :

Soient a, a', b, b' des réels. On a :

- Nombre complexe nul : $a + ib = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \text{ et } b = 0)$
- Egalité : $a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow (a = a' \text{et } b = b')$

4.Opérations dans $\mathbb{C}$:

Pour tous nombres complexes $z = a + ib$et $z' = a' + ib'$; a, a', b, b' étant des nombres réels, on a :

$$z + z' = (a + a') + i(b + b')$$

$$zz' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$$

Exercices d'application :

1) Ecrire les nombres complexes suivants sous la forme algébrique :

$z_1 = (3 - 5i)(1 + 7i) - i(-2 - i)$

$z_2 = (1 - 2i)^3$

$t_n = (1 + i)^n$, suivant les valeurs de $n \in \mathbb{N}$.

2) Déterminer les nombres complexes z tels que $z^2 + z + 1 \in \mathbb{R}$

3) Déterminer les nombres complexes z tels que $z^2 + z + 2 = 0$

5-Représentation géométrique :

Soit $(O, \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé direct du plan (P)

1.Définitions :

- A tout nombre complexe $z = a + ib$ où a et b sont des nombres réels, on associe le point M de couple de coordonnées $(a; b)$ dans ce repère.
- On dit que le point M est le point image de z et que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est le vecteur image de z.
- Inversement, au point $M(a; b)$ du plan on associe le nombre complexe $z = a + ib$.
- On dit que z est l'affixe du point M et aussi du vecteur $\overrightarrow{OM}$:

$$z = aff(M) = aff(\overrightarrow{OM})$$

- Le point M d'affixe z est noté $M(z)$.
- L'axe des abscisses sera nommé l'axe des réels et l'axe des ordonnées sera nommé l'axe des imaginaires purs dans le plan qui sera appelé plan complexe.

2.Propriétés

Dans le plan complexe, on considère $M\ (z)\ et\ M'(z')$.

- On définit le point S par $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$.

Alors l'affixe de S est z + z'.

- Pour tout nombre réel λ non nul, on définit le point M'' par :

$\overrightarrow{OM''} = \lambda\overrightarrow{OM}$ c.à.d. M'' est l'image du point M par l'homothétie de centre O et de rapport λ. L'affixe de M'' est λz

Soient $\vec{w}\ et\ \vec{t}$ deux vecteurs et $A(z_A); B(z_B) et C(z_C)$ des points dans le plan complexe. On a :

- $aff\left(\overrightarrow{AB}\right) = aff(B) - aff(A)$ ou encore $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$
- $aff(\vec{w} + \vec{t}) = aff(\vec{w}) + aff(\vec{t})$ c.à.d. $z_{\vec{w}+\vec{t}} = z_{\vec{w}} + z_{\vec{t}}$
- $aff(\lambda\vec{w}) = \lambda.aff(\vec{w})$ c.à.d. $z_{\lambda\vec{w}} = \lambda z_{\vec{w}}$

On a aussi : $aff(\alpha\overrightarrow{u_1} + \beta\overrightarrow{u_2}) = \alpha.aff(\overrightarrow{u_1}) + \beta.aff(\overrightarrow{u_2})$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- Si I est le milieu de [AB] alors $aff(I) = z_I = \frac{z_A+z_B}{2}$

- Si G est le barycentre de $\{\ (A;\alpha), (B;\beta), (C;\gamma)\}$,avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ alors

$$aff(G) = z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

- Les points $A, B\ et\ C$ sont alignés ssi : $\frac{z_C - z_B}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$; $(A \neq C)$

- $A, B, C\ et\ D$ étant 4 points tels que $A \neq B\ et\ C \neq D$. On a :

$$(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \frac{z_A - z_B}{z_C - z_D} \in \mathbb{R}$$

Rappel :

Si α, β, γ sont des nombres réels tel que :$\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, alors :

$$G = bar\{\ (A;\alpha), (B;\beta), (C;\gamma)\} \Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = 0$$

Exercices d'application :

1) Déterminer les ensembles suivants :

a) (Γ) ensemble des points $M(\lambda(2-3i)$ du plan complexe, $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) (Γ') ensemble des points $M(\lambda(2-3i)$ du plan complexe, $\lambda \in \mathbb{R}^{*+}$

2) Soit les points $A(-1-2i)$, $B(3i)$ et $C(3+3i)$

a) Calculer $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}$, en déduire que les points A, B et C forment un triangle.

b) Calculer l'affixe du point D sachant que $ABCD$ est un parallélogramme.

c) Calculer l'affixe du point E centre du parallélogramme $ABCD$

d) Calculer en utilisant 2 méthodes distinctes l'affixe du point F sachant que : $\overrightarrow{FA} - 3\overrightarrow{FB} - \overrightarrow{FC} = 0$

II- Conjugué d'un nombre complexe

1. Définition :

On considère un nombre complexe z de forme algébrique $x + iy$. Le nombre complexe $x - iy$, noté $\overline{z}$ est le conjugué de z.

$M'(\overline{z})$ est le symétrique de $M(z)$ par rapport à l'axe des réels.

2.Théorèmes

Soit z un nombre complexe. On a :

* z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$

* z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$

* $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ et $z - \overline{z} = 2\,i\,\mathrm{Im}(z)$.

3.Propriétés

Pour tous complexes z et z' :

- $\overline{\overline{z}} = z$

- $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ et $\overline{\lambda z} = \lambda \overline{z}$; $\lambda \in \mathbb{R}$
- $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$ et, pour tout entier relatif n, $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$ si z $\neq 0$.
- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ si z $\neq$ 0 et $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$ si z $\neq$ 0
- $z\overline{z} = a^2 + b^2$ où $z = a + ib$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

4.Inverse d'un nombre complexe non nul :

Propriété :

Pour tout nombre complexe non nul $z = a + ib$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ on a :

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}$$

Remarque :

Pour écrire un rapport $\frac{z}{z'}$ sous forme algébrique, il suffit d'écrire :

$$\frac{z}{z'} = \frac{z\overline{z'}}{z'\overline{z'}}$$

Exercices d'application :

1) Ecrire sous la forme algébrique :$z = \frac{(2-i)(3-2i)}{4-5i}$

2) On pose $z = \frac{3+5i}{5+3i}$ et $t = \frac{3-5i}{5-3i}$

Montrer sans calculs et en utilisant 2 méthodes distinctes que $z + t$ est un nombre réel et $z - t$ est un nombre imaginaire pur.

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\frac{4\overline{z}-2}{z+1} = -3 + i$.

(On posera : $z = x + iy$ $avec$ $(x, y) \in \mathbb{R}^2$)

4) En utilisant 2 méthodes distinctes déterminer l'ensemble (Γ) des points $M(z)$ du plan complexe sachant que $\frac{z-i}{z+i}$ est un imaginaire pur.

III-Module d'un nombre complexe

1. Définition

Soit $z = a + ib, (a, b) \in \mathbb{Z}^2$; un nombre complexe d'image M dans le plan muni d'un repère orthonormé direct. Le module de z est le nombre réel positif noté $|z|$ et définit par :

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Et on a : $|z| = OM$

2. Distance de 2 points :

Propriété :

Longueur d'un segment [AB] : $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = |z_A - z_B| = |z_B - z_A|$

3. Propriétés des modules

Pour tous complexes z et z' :

- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|\bar{z}| = |-z| = |z|$
- $|Re(z)| \leq |z|$ et $|Im(z)| \leq |z|$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$: inégalité triangulaire
- $\big||z| - |z'|\big| \leq |z - z'|$
- $|zz'| = |z||z'|$
- $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$, avec $z \neq 0$
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$, avec $z' \neq 0$
- $|z^n| = |z|^n$, avec $z \neq 0$ et $n \in \mathbb{Z}$

Preuve de l'inégalité triangulaire :

Simplifions la différence des carrées :

$$\left(|z| + |z'|\right)^2 - |z + z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'| - (z + z')(\bar{z} + \bar{z'})$$

$$= z\bar{z} + z'\bar{z'} + 2|z||z'| - z\bar{z} - z\bar{z'} - z'\bar{z} - z'\bar{z'}$$

$$= 2|z||z'| - (z'\bar{z} + \overline{z'\bar{z}})$$

$$= 2|z\,\overline{z'}| - 2Re(z'\bar{z})$$

$$= 2(|z\,\overline{z'}| - Re(z'\bar{z})) \geq 0$$

D'où : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

Exercices d'application :

1) Calculer le module du nombre complexe :

$$z_1 = \frac{2023-2024i}{2023+2024i}$$

$$z_2 = (3-i)^5$$

$$z_3 = \left(\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{1+i}\right)^4$$

$$z_4 = (3+4i)\left(\sqrt{\sqrt{2}-1} + i\sqrt{\sqrt{2}+1}\right)$$

2) On considère dans le plan complexe les points $A, B\ et\ C$ d'affixes $a = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $b = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ et $c = -i$ repectivement.

Calculer les distances $AB, BC\ et\ CA$,en déduire la nature du triangle ABC

3) Déterminer l'ensemble (Γ) des points $M(z)$ du plan complexe sachant que :

a) $|(1+i)\bar{z} - 3 + 2i| = |3 - 4i|$

b) $|(1+i)\bar{z} - 3 + 2i| = \sqrt{2}|iz - 3 + 2i|$

IV-Arguments et formes trigonométriques d'un nombre complexe non nul.

On considère dans toute la suite de ce cours que le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

1. Définition et propriété

Soit z un nombre complexe non nul d'image M dans le plan complexe et soit (r, θ) un couple de coordonnées polaires du point M dans le repère $\Delta(O, \vec{u})$. C.à.d. :

$$r = |z| = OM \text{ et } \theta \equiv \overline{(\vec{u};\overrightarrow{OM})} \; [2\pi]$$

Le réel θ est appelé *un* argument de z et noté $arg(z)$.

Et on a : $\forall z \in \mathbb{C}^{*}: z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $\begin{cases} |z| = r \\ \arg(z) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$

L'écriture $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ est appelée une forme trigonométrique de z.

Remarques :

Pour tout réel θ on a :

$$\cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$$

$$-\cos\theta + i\sin\theta = \cos(\pi - \theta) + i\sin(\pi - \theta)$$

$$-\cos\theta - i\sin\theta = \cos(\pi + \theta) + i\sin(\pi + \theta)$$

Exercices d'application :

1) Déterminer une forme trigonométrique des complexes :

$$1; -3, 2i, 1 + i; \; -1 + i\sqrt{3}; \sqrt{6} - i\sqrt{2}; -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

2) Déterminer sans calculs l'ensemble (Γ) des points $M(z)$ du plan complexe sachant que :

a) $\arg(z - 3 - 5i) \equiv \frac{\pi}{3} \; [\pi]$

b) $\arg(z - 3 - 5i) \equiv \frac{\pi}{3} \; [2\pi]$

2. Relations de passage entre forme algébrique et formes trigonométriques.

Propriétés :

Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = a + ib$ avec $(a, b, \theta) \in \mathbb{R}^3$ et $r \in \mathbb{R}^{+*}$

On a : $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ et : $\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{r} \\ \sin\theta = \frac{b}{r} \end{cases}$

Et si $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2} \; [\pi]$ alors : $\tan\theta = \frac{b}{a}$

3.Propriétés des arguments

Pour tous $(z,z') \in \mathbb{C}^{*2}$ et $n \in \mathbb{Z}$ on a :

- $z \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow arg\, z \equiv 0[\pi]$
- $z \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow arg\, z \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$
- $arg\, \overline{z} \equiv -arg\, z\,[2\pi]$
- $arg(-z) \equiv \pi + arg\, z\,[2\pi]$
- $arg(zz') \equiv arg\, z + arg\, z'[2\pi]$
- $arg\frac{1}{z} \equiv -arg\, z\,[2\pi]$
- $arg\frac{z}{z'} \equiv arg\, z - arg\, z'[2\pi]$
- $arg\, z^n \equiv n\, arg\, z\,[2\pi]$

Formule de Moivre :

$$\forall\theta \in \mathbb{R}; \forall n \in \mathbb{Z}: (cos\,\theta + i\,sin\,\theta)^n = cos(n\,\theta) + i\,sin(n\,\theta)$$

Application *:*

Calcul de $cos\,n\,\theta et\,sin\,n\,\theta$ en fonction de $cos\,\theta\ et\ sin\,\theta$

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}\ et\ n \in \mathbb{N}$ on a :

- $cos\,n\,\theta = Re[(cos\,\theta + i\,sin\,\theta)^n]$
- $sin\,n\,\theta = Im[(cos\,\theta + i\,sin\,\theta)^n]$

Exercices d'application :

1) Déterminer une forme trigonométrique des complexes :$\frac{\sqrt{3}-i}{-1+i}$; $\frac{-1-i\sqrt{3}}{-1+i}$;

2) Déterminer une forme trigonométrique du nombre complexe $(1+i)(\sqrt{3}+i)$ en déduire la valeur exacte de $cos\frac{5\pi}{12}$ et $sin\frac{5\pi}{12}$

3) Montrer que le *nombre complexe* $(1-i)^{22}$*est un imaginaire pur.*

4) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose : $u_n = (1+i)^n - \left(1+i\sqrt{3}\right)^n$

Ecrire u_n sous la forme algébrique.

5) En utilisant *la formule de Moivre* calculer $\cos(3x)\ et\ \sin(3x)$ en fonction de $cosx\ et\ sinx$.

4.Interprétations graphiques des arguments

Propriétés :

$A, B, C\ et\ D$ étant 4 points distints 2 à 2 d'affixes z_A, z_B, z_C, z_D respectivement.On a :

- $\overline{(\vec{u}, \overrightarrow{AB})} \equiv arg(z_B - z_A)\ [2\pi]$
- $\overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})} \equiv arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi]$

Conséquences :

Les points $A, B, C, et\ D$ étant quatre points distincts 2 à 2 :

-les points $A, B\ et\ C$ sont alignés si, et seulement si :

$$arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv 0\ [\pi]$$

-les droites $(CA)\ et\ (CB)$ sont perpendiculaires si, et seulement si :

$$arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$$

-les points $A, B, C, et\ D$ sont **alignés** ou **cocycliques** si, et seulement si :

$$\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} : \frac{z_C - z_B}{z_D - z_B} \in \mathbb{R}$$

Exemple :

1) On considère dans le plan complexe les points $A, B\ et\ C$ d'affixes $a = 1 + 3i$, $b = 3 + i$ et $c = 4 + 2i$ repectivement

Calculer $\frac{a-b}{c-b}$, en déduire la nature du triangle ABC.

2) Déterminer sans calculs l'ensemble (Γ) des points $M(z)$ du plan complexe sachant que :

a) $arg\frac{z-4+2i}{z+i} \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

b) $arg\frac{z-4+2i}{z+i} \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

c) $arg\frac{z-4+2i}{z+i} \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

d) $arg\frac{2+i}{z} \equiv arg\frac{z}{1-i}\ [2\pi]$

V- La notation exponentielle d'un nombre complexe non nul.

1.Définition

Pour tout réel θ on note le nombre complexe $cos\theta\ +\ isin\theta$ par $e^{i\theta}$ c.à.d. $e^{i\theta}\ =\ cos\theta\ +\ isin\theta.$

Si *z* est un nombre complexe non nul de module *r* et dont un argument est θ, on appelle *forme exponentielle* de *z* l'écriture : $r\ =\ re^{i\theta}$.

Remarques :

i. $e^{i\pi} = e^{-i}\ = -1$

ii. $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

iii. $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$

iv. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

   a. $e^{ik2\pi} = 1$

   b. $e^{i(2k+1)\pi} = -1$

   c. $e^{i\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi\right)} = i$

   d. $e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi\right)} = -i$

Exercice d'application :

Ecrire le nombre $z =\ -\sqrt{6} - i\sqrt{2}$ sous une forme exponentielle.

2.Règles de calcul sur les formes exponentielles

$\theta\ et\ \theta'$ sont des réels quelconques, $r\ et\ r'$ sont des réels strictement positifs.

On a :

- ✓ $re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \Leftrightarrow (r = r'et\theta \equiv \theta'[2\pi])$
- ✓ $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
- ✓ $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$
- ✓ $\frac{1}{e^{i\theta}} = \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- ✓ Et pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$: Formule de Moivre.
- ✓ $-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)} = e^{i(\theta-\pi)}$

Exercice d'application :

Ecrire le nombre $z = \left(\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{6}}{1+i}\right)^3$ sous une forme exponentielle.

Formules d'Euler :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{cases} e^{ix} + e^{-i} & = 2\cos x \\ e^{ix} - e^{-ix} & = 2i\sin x \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} \cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \\ \sin x = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \end{cases}$$

Application :

Ecriture de $e^{i\theta} \pm e^{i\theta'}; 1 \pm e^{i\theta}$sous la forme $re^{i\theta}$:

On peut écrire :

- ➢ $e^{i\theta} \pm e^{i\theta'} = e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\left(e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}} \pm e^{-i\frac{\theta-\theta'}{2}}\right)$
- ➢ $1 \pm e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} \pm e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)$

Puis on applique les formules d'Euler.

Exercices d'application :

1.Ecrire sous forme trigonométrique :

a) $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{4}}$

b) $1 - \cos x + i \sin x$, $x \in \mathbb{R}$

c) $\frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}$, $\theta \in]-\pi, \pi[$

d) $1 + \sin\theta - i\cos\theta$, $\theta \in]-\pi, \pi[$. (Discuter suivant les valeurs de θ)

2. *En utilisant les formules d'Euler, linéariser :* $\cos^2 x$, $\cos^3 x$, $\sin^4 x$

3. *Linéariser :* $f(x) = \cos 2x \sin^2 5x$ *en déduire une primitive de f sur* $\mathbb{R}$

VI- Equation du second degré à coefficients réels dans $\mathbb{C}$

1-Racines carrées d'un nombre complexe

Propriété :

Tout nombre complexe Z a exactement deux racines carrées complexes z et $-z$ opposées, distinctes $(z^2 = (-z)^2 = Z)$, *excepté 0*, dont 0 est la seule racine carrée.

Démonstration : (à savoir)

Posons $Z = a + ib, (a, b) \in \mathbb{R}^2$ et cherchons $z = x + iy, (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z^2 = Z$.

(Pour simplifier la résolution on ajoutera l'équation : $|z|^2 = |Z|$)

$$z^2 = Z \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = Z \\ |z|^2 = |Z| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 2xyi = a + ib \\ x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ sgn(xy) = sgn(b) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = a + \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} - a \\ sgn(xy) = sgn(b) \end{cases} \quad \text{Etc...}$$

Ce système admet deux solutions car $(sgn(xy) = sgn(b))$

Exercice d'application :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ *l'équation* $z^2 = 7 - 24i$

Remarques :

Racines carrées d'un nombre réel négatif ou d'un nombre imaginaire pur :

- Si $a \in \mathbb{R}^{*-}$ alors les racines carrées complexes de a sont :

$$i\sqrt{-a}\ et - i\sqrt{-a}$$

- Pour d'un nombre imaginaire pur on peut utiliser une des 2 égalités :

$$2i = (1+i)^2 et - 2i = (1-i)^2$$

2-Propriété :

* Toute équation $az^2 + bz + c = 0$, d'inconnue *z* dans laquelle *a, b* et *c* *nombres complexe*s, $a \neq 0$, admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions, éventuellement égales :$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$ où δ est une racine carrée du discriminant de l'équation $\Delta = b^2 - 4ac$.

* Si *a, b* et *c sont réels,* $a \neq 0\ et\ \Delta < 0$ alors l'équation admet deux solutions complexes conjuguées $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \overline{z_1} = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Remarques :

On a aussi : $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}\ et\ z_1 z_2 = \frac{c}{a}$

Exercice résolu :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ *l'équation* $z^2 + (2+i)z - 1 + 7i = 0$

Solution *:*

On a : $\Delta = (2+i)^2 - 4(-1+7i) = 7 - 24i = (4-3i)^2 \neq 0$

Donc l'équation admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{C}$:

$$z_1 = \frac{-2 - i + 4 - 3i}{2} = 1 - 2i\ ;\ z_2 = \frac{-2 - i - 4 + 3i}{2} = -3 + i$$

Exercices d'application :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ *les équations :*

$$z^2+z+1=0\ ,z^2-2z+4=0\ \ ,2z^2-2z+5=0$$

VII-Racines n[ièmes] d'un nombre complexe non nul. Equation $\mathbf{z^n = Z}$

1- Propriété :

Pour tout entier n ≥ 1, tout nombre complexe non nul $Z = |Z|e^{i\varphi}$possède n racines nièmes complexes données par :

$$z_k = \sqrt[n]{|Z|}e^{i\left(\frac{\varphi}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)},\ k \in \{0;1;2;\ldots;n-1\}$$

Les points $M_k(z_k)$ où $k \in \{0;1;2;\ldots;n-1\}$ sont les sommets d'un polynôme régulier à n côtés inscrit dans le cercle de centre O et de rayon$\sqrt[n]{|Z|}$.

($OM_k = |z_k| = \sqrt[n]{|Z|}$ et $\overline{(\overrightarrow{OM}_k;\overrightarrow{OM}_{k+1})} \equiv arg\,\frac{z_{k+1}}{z_k} \equiv \frac{2\pi}{n} = c^{te}[2\pi]$; O est équidistant de tous les sommets du polygone et que c'est l'isobarycentre de l'ensemble des sommets)

Démonstration :

Posons $z = |z|e^{i\theta}$.On a :

$$z^n = Z \Leftrightarrow |z|^n e^{in\theta} = |Z|e^{i\varphi} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^n = |Z| \\ n\theta \equiv \varphi[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt[n]{|Z|} \\ \exists k \in \mathbb{Z}: \theta = \dfrac{\varphi}{n} + k\dfrac{2\pi}{n} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: z = \sqrt[n]{|Z|}e^{i\left(\frac{\varphi}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)}$$

Division euclidienne de *k* par *n :* $k = qn + r$ *avec* $0 \le r < n$

Posons $\theta_k = \frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}$.

Donc :

$$\theta_k = \frac{\varphi}{n} + (qn+r)\frac{2\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + r\frac{2\pi}{n} + q2\pi = \theta_r + q2\pi \text{ d'où } \theta_k \equiv \theta_r[2\pi]$$

Or $r \in \{0;1;2;\ldots;n-1\}$ donc Z possède n racines nièmes.

Exercices d'application :

1) Déterminer sous forme exponentielle les racines cubiques du complexe : $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$ et écrire les solutions sous la forme algébrique :

a) $z^4 + 16 = 0$

b) $z^3 = i$

2-Cas particulier :Racines n**ièmes* ***de l'unité

Propriétés :

- L'ensemble des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité est :

$$U_n = \left\{e^{k\frac{2\pi}{n}i} / k \in \{0; 1; 2; \dots; n-1\}\right\}$$

c.à.d. $U_n = \left\{\omega_1^k / k \in \{0; 1; 2; \dots; n-1\}\right\} = \{1; \omega_1; \omega_1^2; \dots; \omega_1^{n-1}\}$

c.à.d. $U_n = \{1; \omega_1; \omega_1^2; \dots; \omega_1^{n-1}\}$ où $\omega_1 = e^{\frac{2\pi}{n}i}$

- et on a en posant $\omega_k = e^{k\frac{2\pi}{n}i}$: $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = 0$; $\overline{\omega_k} = \frac{1}{\omega_k} = \omega_{n-k}$

- Pour tout $m \in \mathbb{Z}$ on a : $\sum_{k=0}^{n-1} {\omega_k}^m = \begin{vmatrix} 0; si\ n \nmid m \\ n; si\ \ n|m \end{vmatrix}$ (*)

***Démonstration de* (*) :**

On a : $\sum_{k=0}^{n-1} {\omega_k}^m = \sum_{k=0}^{n-1} (\omega_1^m)^k$

Et $\omega_1^m = 1 \Leftrightarrow e^{\frac{2\pi}{n}mi} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2\pi}{n}m = k'2\pi\ ; k' \in \mathbb{Z}\right)$

$\Leftrightarrow (m = k'n; k' \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow n|m$

Donc si $n|m$ alors $\sum_{k=0}^{n-1} {\omega_k}^m = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$

Sinon : $\sum_{k=0}^{n-1} {\omega_k}^m = \sum_{k=0}^{n-1} (\omega_1^m)^k = \frac{1-(\omega_1^m)^n}{1-\omega_1} = 0$

Exercices d'application :

Déterminer les racines carrées, cubiques complexes de ($1; j; \bar{j} = j^2$), et les racines *quatrièmes complexes* de l'unité.

3. Propriété *:*

Les racines nièmes d'un nombre complexe Z peuvent aussi être obtenues en multipliant l'une des racines nièmes de Z par les racines nièmes de l'unité.

Exercices d'application :

1) Calculer $(2 + i)^4$

2) Résoudre l'équation suivante algébriquement dans $\mathbb{C}$: $z^4 + 7 - 24i = 0$

VIII-Expressions complexes des transformations usuelles du plan

1. Propriétés :

Soit T une transformation usuelle du plan qui associe à chaque point $M(z), z \in \mathbb{C}$ du plan un point $M'(z'), z' \in \mathbb{C}$: $T(M) = M'$

a) Si $T = t_{\vec{w}}$ est une translation de vecteur $\vec{w}$ alors $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ *et* l'expression complexe de $t_{\vec{w}}$ s'écrit *:* $z' = z + z_{\vec{w}}$

b) Si $T = r_{(\Omega,\theta)}$ est une rotation de centre $\Omega(\omega)$ et de mesure d'angle θ alors :

$$r(\Omega) = \Omega \ et \text{ si } M \neq \Omega \ alors\text{: } \begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \hline (\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

L'expression complexe de la rotation $r_{(\Omega,\theta)}$ s'écrit :

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$$

c) Si $T = h_{(\Omega,k)}$ est l'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k , $k \in \mathbb{R}^* - \{1\}$, alors $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$

L'expression complexe de l'homothétie $h_{(\Omega,k)}$ s'écrit :

$$z' - \omega = k(z - \omega)$$

Cas particulier :

Cas de la symétrie de centre $\Omega(\omega)$ on a :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M} \text{ et } z' - \omega = -(z - \omega)$$

Exercices d'application :

Donner l'expression complexe des transformations suivantes :

a) t est la translation de vecteur $-\vec{v}$.

b) t est la translation qui transforme $A(1-i)$ en $B(3+2i)$

c) h est l'homothétie de centre $\Omega(1+i)$ qui transforme $A(3+2i)$ en $B(5+3i)$

d) r est la rotation de centre $A(i)$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

2. Composée de 2 transformations usuelles du plan :

Théorème :

Soit T une transformation du plan d'écriture complexe $z' = az + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$

- Si $a = 1$, alors T est la translation de vecteur $\vec{w}(b)$

- Si $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$, alors T est l'homothétie de rapport $|a|$ et de centre $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$

- Si $|a| = 1$ et $a \neq 1$, alors T est la rotation de centre $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$ et d'angle arga

- Si $|a| \neq 1$, alors T est la composée commutative de *l'homothétie h de rapport a et de centre $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$ et de la rotation r de centre $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$ et de mesure d'angle $arga$:*

$$T = r \circ h = h \circ r$$

Exercices d'application :

1) Déterminer la nature de la transformation T du plan définie par son écriture complexe dans les cas suivants :

a) $z' = z - 1 + i$

b) $z' = -\frac{z}{2} + 1 + 2i$

c) $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + i$

d) $z' = (-1 + i)z + 2 - i$

2) Soient h *l'homothétie de rapport* $k = -\frac{1}{2}$ *et de centre* $\Omega(i)$ *et la rotation* r *de centre* $\Omega'(-i)$ *et de mesure d'angle* $\frac{\pi}{2}$ *.*

Déterminer une écriture complexe de la transformation $T = r \circ h$*.*