Limite d'une suite numérique

Niveau : $2^{ème}$ Bac.Sc.Maths.Fr

I-Rappels de la classe antérieure ($1^{ère}$ année Sciences mathématiques) :

1.Suite majorée, minorée, bornée

- Une suite (u_n) est dite majorée ssi $\exists M \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N}: u_n \leq M$
- Une suite (u_n) est dite minorée ssi $\exists m \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N}: u_n \geq m$
- Une suite (u_n) est dite bornée ssi elle est majorée et minorée
- Une suite (u_n) est bornée ssi $\exists M \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N}: |u_n| \leq M$

2.Sens de variation d'une suite

- Une suite (u_n) est dite croissante ssi : $\forall n \in \mathbb{N}: u_{n+1} \geq u_n$
- Une suite (u_n) est dite décroissante ssi : $\forall n \in \mathbb{N}: u_{n+1} \leq u_n$
- Une suite (u_n) est dite constante ssi : $\forall n \in \mathbb{N}: u_{n+1} = u_n$

3.Exemples de suites

a. Suite arithmétique

- Une suite (u_n) est dite arithmétique de raison r ssi : $\forall n \in \mathbb{N}: u_{n+1} = u_n + r$

- Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r alors :

-$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2: u_n = u_p + (n-p)r$

- $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 / n > p: u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = (n-p+1)\frac{u_p+u_n}{2}$

$a, b et c$ trois termes consécutifs d'une suite arithmétique ssi $b = \frac{a+c}{2}$

b. Suite géométrique

- Une suite (u_n) est dite géométrique de raison q ssi : $\forall n \in \mathbb{N}: u_{n+1} = qu_n$

- Si (u_n) est une suite géométrique de raison q alors :

$$-\forall(n,p) \in \mathbb{N}^2 : u_n = u_p q^{n-p}$$

$$- \forall(n,p) \in \mathbb{N}^2 / n > p : u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

$a, b et c$ trois termes consécutifs d'une suite géométrique ssi $b^2 = ac$

Exercices de révision

Exercice 1

Soit la suite récurrente (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} = \sqrt{6+u_n} \end{cases}$

1) Démontrer par récurrence que la suite est majorée par 3.

2) Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

3) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*; u_n > 0$

Exercice 2 :

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = \frac{5u_n - 1}{3 + u_n} \text{ et } v_n = \frac{1}{u_n - 1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1) Montrer que la suite (v_n) *est arithmétique*

2) Calculer v_n , u_n et $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_n$ en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 3 :

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > -4$

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante

3) Montrer que la suite (u_n) converge.

4) On considère la suite (v_n) définie par : $v_n = u_n + 4$ pour tout entier naturel n

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{3}{4}$

b) Calculer v_n puis u_n en fonction de n pour tout entier naturel n

c) Calculer les sommes $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_n$, puis $S_n' = \sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n pour tout entier naturel n.

II- Convergence d'une suite :

Activité :

Soit la suite numérique (u_n) définie par :$\forall n \in \mathbb{N} : u_n = \frac{2n-3}{n+1}$

Soit ε un nombre réel strictement positif.

Déterminer en fonction de ε un entier naturel n_0 tel que : $\forall n \geq n_0 : |u_n - 2| < \varepsilon$

1.Définition :

Dire qu'un réel l *est la limite d'une suite numérique* (u_n) ou que signifie que tout intervalle ouvert de centre l *contient tous les termes de la suite à partir d'un indice.*

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0 : |u_n - l| < \varepsilon$$

2. Théorème et définition :

Si une suite numérique (u_n)admet une limite finie l alors *Cette limite est unique et on dit que la* suite(u_n) converge vers l et que la suite(u_n) est convergente et on écrira alors : $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$

Preuve :

Raisonnons par l'absurde :

On suppose qu'une suite (u_n) admet 2 limites **distinctes** l_1 et l_2.

Posons par exemple : $\varepsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{4} > 0$. On a alors :

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_1 : |u_n - l_1| < \frac{|l_1 - l_2|}{4}$$

$$\exists n_2 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_2 : |u_n - l_2| < \frac{|l_1 - l_2|}{4}$$

Soit $n_0 = \max(n_1, n_2)$

En utilisant l'inégalité triangulaire $|x+y| \leq |x|+|y|$, on a :

$$\forall n \geq n_0 : |l_1 - l_2| = |(u_n - l_1) - (u_n - l_2)| \leq |u_n - l_1| + |u_n - l_2|$$

D'où :

$\forall n \geq n_0 : |l_1 - l_2| \leq \frac{|l_1 - l_2|}{2}$ .D'où : $1 \leq \frac{1}{2}$: C'est absurde. Donc $l_1 = l_2$.

3.Propriété :

Toute suite convergente est bornée. (La réciproque est fausse)

Preuve :

Utiliser la définition de la limite

Contre-exemple :

La suite définie par $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = (-1)^n$ est bornée : $\forall n \in \mathbb{N} : |u_n| \leq 1$, mais ne converge pas car elle prend les valeurs $1\ et -1$ en alternance.

4.Théorème :(Admis)

Toute suite croissante et majorée est convergente

Toute suite décroissante et minorée est convergente

5.composée d'une suite par une fonction :

Théorème :

Si (u_n) est une suite qui converge vers un réel l et si f est une fonction continue en l alors la suite (v_n) définie par $v_n = f(u_n)$ pour tout $n \geq n_0$ converge vers $f(l)$

Preuve : Utiliser la définition de la limite

Exercice :

Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = \arctan\left(\frac{n\sqrt{3}-1}{n+1}\right)$ converge et calculer sa limite.

6. **Théorèmes de comparaison :**

a. Limite d'une suite et ordre :

Propriété :

Soit (u_n)et (v_n) deux suites numériques convergentes

- Si $\begin{cases} \forall n \geq n_0 : u_n > 0 \\ et \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l \end{cases}$ $alors \quad l \geq 0$

- Si $\begin{cases} \forall n \geq n_0 : u_n < v_n \\ et \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l et \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l' \end{cases}$ $alors \quad l \leq l'$

b. Critères de convergence

Théorème des Gendarmes :

i. Si (u_n), (v_n) et (w_n)sont des suites numériques telles que $\forall n \geq n_0 : v_n < u_n < w_n$ et si (v_n) et (w_n) convergent vers une même limite *l* alors (u_n) converge vers *l*

ii. Si (u_n)et (v_n) sont deux suites numériques telles que $\forall n \geq n_0 : |u_n - l| < v_n$ et si (v_n) converge vers 0 alors (u_n) converge vers *l*

Exercice d'application :

Montrer que les suites numériques définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} \quad , \qquad v_n = -1 + \frac{cosn}{n+1} \quad , \quad w_n = \frac{sinn}{1+\sqrt{n}}$$

convergent et déterminer la limite de chacune.

III. Limite infinie d'une suite numérique :

1.Définitions :

Soit (u_n) une suite numérique. On définit :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0; \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0 : u_n > A$$
$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \forall A > 0; \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0 : u_n < -A$$

Une suite qui n'a pas de limite ou dont la limite n'est pas finie est dite une suite divergente.

2. Limite de la suite $(n^{\alpha})_{n\in\mathbb{N}^*}$ ou $\alpha \in \mathbb{Q}^*$

Propriété :

Soit $\alpha \in \mathbb{Q}^*$.On a :

Si $\alpha > 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\alpha} = +\infty$

et si $\alpha < 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\alpha} = 0$

Preuve :

Si $\alpha \in \mathbb{N}^*$, alors $\forall n \in \mathbb{N} :\ n^{\alpha} \geq n$ et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$…

Si $\alpha \in \mathbb{Q}^{+*}$ alors $\alpha = \frac{p}{q}$ avec : $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$ et on a : $n^{\alpha} = \sqrt[q]{n^p}$ …

Si $\alpha \in \mathbb{Q}^{-*}$ alors $-\alpha \in \mathbb{Q}^{+*}$ et on a : $n^{\alpha} = \frac{1}{n^{-\alpha}}$ …

3. Théorèmes :

i. Toute suite croissante et non majorée a pour limite $+\infty$

ii. Toute suite décroissante et non minorée a pour limite $-\infty$

Exercice d'application :

Etudier la monotonie de la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = n^2 - 2n$; et montrer par l'absurde qu'elle est non majorée en déduire sa limite.

4. **Théorèmes de comparaison :**

Théorème :

i. Si $\begin{cases} \forall n \geq n_0 : u_n < v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty \end{cases}$ $alors \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

ii. *i.* Si $\begin{cases} \forall n \geq n_0 : u_n > v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty \end{cases}$ $alors \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Exercice d'application :

Déterminer la limite de la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n = n - (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

IV. Opérations sur les limites des suites :

Propriété

Si deux suites numériques (u_n) et (v_n) sont convergentes, alors :

- Les suites $(u_n + v_n)$ et $(u_n v_n)$ convergent et on a :

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n + \lim_{n\to+\infty} v_n \text{ et } \lim_{n\to+\infty}(u_n v_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n \times \lim_{n\to+\infty} v_n$$

- Et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \neq 0$, alors la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge et on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n}$$

Remarque

Les propriétés des extensions des opérations sur les limites des fonctions $f : x \mapsto f(x)$ lorsque $x \to +\infty$ restent valables pour les limites des suites numériques.

V. Théorèmes de comparaison :

1. Limite d'une suite et ordre :

Propriétés :

Soit (u_n) et (v_n) deux suites numériques convergentes

-Si $\begin{cases} \forall n \geq n_0 : u_n > 0 \\ et \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \end{cases}$ $alors \quad l \geq 0$

-Si $\begin{cases} \forall n \geq n_0 : u_n < v_n \\ et \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \; et \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l' \end{cases}$ $alors \; l \leq l'$

2. Critères de convergence d'une suite :

Propriétés :

Soit (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites numériques convergentes

-Si $\begin{cases} \forall n \geq n_0 : v_n \leq u_n \leq w_n \\ et \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l \end{cases}$ *alors la suite* (u_n) *converge et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

-Si $\begin{cases} \forall n \geq n_0 : |u_n - l| < v_n \\ et \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0 \end{cases}$ *alors la suite* (u_n) *converge et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

VI. Limites de la suite $(\boldsymbol{a^n})$

Théorème :

Soit $a \in \mathbb{R}$. *On a :*

Si $a > 1$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$

Si $|a| < 1$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$

Si $a = 1$ *alors* (a^n) *est constante :*$\forall n \in \mathbb{N} : 1^n = 1$

Si $a \leq -1$ *alors* (a^n) *n'a pas de limite*

Preuve

- Si $a > 1$ alors en posant $\alpha = a - 1 > 0$ et en utilisant l'inégalité de Bernoulli :

$$(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha$$

On a :

$$a^n = \big(1 + (a-1)\big)^n \geq 1 + n(a-1)$$

Et comme a $- 1 > 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + n(a-1) = +\infty$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$

- les cas $a = 0$ et $a = 1$ sont triviaux.

- Si $|a| < 1$ et $a \neq 0$ alors $\frac{1}{|a|} > 1$, d'où $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{|a|}\right)^n = +\infty$

D'où $\lim_{n\to+\infty} |a^n| = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$

- Si $a = -1$,la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = (-1)^n$ diverge et n'admet aucune limite.

- Si a < -1 alors $|a| > 1$ et $\lim_{n\to+\infty} |a^n| = +\infty$, mais la suite (a^n) change de signe en alternance, donc elle diverge et n'admet aucune limite.

Exercices d'application :

Etudier la convergence de chacune des suites numériques suivantes :

1) $u_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n sin\sqrt{n}$ 2) $v_n = \frac{3^n - 5^n}{3^n + 5^n}$ 3) $w_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}$

VII. Convergence d'une suite récurrente :$\boldsymbol{u_{n+1} = f(u_n)}$

Activité :

1.a) Tracer dans un repère orthonormé du plan la droite $(\Delta): y = x$ et la courbe de la fonction $f: x \longmapsto 5 - \frac{4}{x}$ sur l'intervalle $]0; 8]$.

b) Déterminer $f(I)$ où $I = [3; 4]$ et vérifier que $f(I) \subset I$

2) On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 3 \ \ et\ \forall n \in \mathbb{N}: u_{n+1} = f(u_n)$$

a. Prouver par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}; u_n \in I$

b. Etudier la monotonie de la suite (u_n) ; en déduire qu'elle converge.

c. Conjecturer la limite de la suite (u_n) à partir du graphique précédent.

d. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}: 0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$

e. En déduire par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}: 0 \leq |4 - u_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

f. En déduire la limite l de la suite (u_n) et vérifier que $f(l) = l$.

Théorème :

Si (u_n) est une suite convergente définie par la relation de récurrence :

$u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \geq n_0$ et par son premier terme $u_{n_0} \in I$ ou f est une fonction continue sur l'intervalle I tel que $f(I) \subset I$, alors la limite de la suite (u_n) est une solution de l'équation $f(x) = x$

VIII. Deux suites adjacentes :

Activité :

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 2]$ par :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$$

1) Etudier les variations de f et vérifier que $f([0\ ;\ 2]) \subset [0\ ;\ 2]$ puis représenter f graphiquement dans un repère orthonormé. Tracer la droite $(\Delta): y = x$ dans le même repère. On prendra $4cm$ comme unité.

2) Résoudre l'équation $f(x) = x$

3) On considère les suites (u_n)et (v_n) définies par :

$$u_0 = 1, v_0 = 2 \ et \ \forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} = f(u_n) \ et \ v_{n+1} = f(v_n)$$

Conjecturer graphiquement la monotonie , la convergence et la limite des 2 suites.

1.Définition :

On dit que deux suites numériques (u_n)et (v_n) sont adjacentes ssi l'une est croissante, l'autre est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$

2.Théorème

Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite

Preuve à faire par les élèves :

On considère 2 suites numériques adjacentes $(u_n)_{n\geq 0}$ *et* $(v_n)_{n\geq 0}$ *, telles que* (u_n) *soit croissante et* (v_n) *soit décroissante. On pose* $\forall n \geq 0 : w_n = v_n - u_n$

1. Prouver que la suite (w_n) *est décroissante.*

2. En déduire que $\forall n \geq 0 : v_n \geq u_n$

3. En déduire que les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ *et* $(v_n)_{n\geq 0}$ *sont convergentes et ont la même limite.*

Exercices d'application :

1) Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ *et* $(v_n)_{n\geq 0}$ *définies par :* $u_n = -\frac{1}{n+2}$ *et* $v_n = \frac{1}{n+1}$ *sont adjacentes.*

2) Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ *et* $(v_n)_{n\geq 0}$ définies par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad et\ v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

sont adjacentes. (Limite commune notée e définissant la fonction exponentielle)