Probabilités

Niveau : 2ème Bac Sciences mathématiques.

Prérequis :

Analyse combinatoire. Voir Cours 1ère Sc.Maths

Activité :

On lance une pièce de monnaie bien équilibrée, et on s'intéresse à la face supérieure de la pièce qui apparait.

1) Quel est l'ensemble Ω de tous les résultats possibles de cette épreuve ?

2) Peut-on prévoir le résultat ? Comment peut-on nommer une telle épreuve ?

3) On répète l'expérience n fois $(n > 4000)$, et on étudie la fréquence d'apparition de la face « Pile », c'est-à-dire le nombre :

$$f_n = nombre\ de\ fois\ où\ la\ face\ «\ Pile\ »\ apparaisse$$

Quand le nombre de lancer augmente le nombre f_n se stabilise autour d'un nombre limite, compris entre 0 et 1 :

$$\lim_{n \to +\infty} f_n = \frac{1}{2}$$

Le nombre $\frac{1}{2}$ est appelé la probabilité d'apparition de « Pile » dans un seul lancer de la pièce bien équilibrée.

I. Notion de probabilité :

1.Introduction :

La théorie des probabilités consiste à mathématiser le hasard, c'est à dire les phénomènes aléatoires et donner un sens précis aux phrases du type :

"A pile ou face, j'ai une chance sur deux d'obtenir pile."

Expérience (ou épreuve) aléatoire : Expérience dont il est impossible de prévoir le résultat.

Exemples :

• Lancer une pièce de monnaie: On ne peut prévoir si la pièce va tomber sur pile ou sur face.

• Lancer un dé cubique: On ne peut prévoir si le dé va se stabiliser sur la face 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.

• Tirages de p boules d'un sac qui contient n boules colorées

2. Vocabulaire :

- L'ensemble de tous les résultats possibles associé à une épreuve aléatoire est appelé l'univers des éventualités (ou issue) et noté par Ω.Dans toute la suite Ω est fini.
- Les parties de Ω se nomment des événements. $P(\Omega)$est leur ensemble.
- Si ω est une éventualité, la partie $\{\omega\}$ de Ω se nomme événement élémentaire
- Ω est l'événement certain et $\emptyset$ est l'événement impossible.

Soient $A et B$ deux événements.

- $A et B$ sont incompatibles signifie : $A \cap B = \emptyset$
- Le complémentaire de $A dans \Omega$est noté $\overline{A}$ et appelé l'événement contraire de A
- L'événement A est réalisé signifie qu'une éventualité de A est apparue comme résultat de l'épreuve

On dira qu'un événement s'est réalisé si le résultat de l'expérience fait partie de l'événement.

Exemples et rappels :

- Lancer une pièce de monnaie une seule fois :

$$\Omega = \{P; F\} \text{ ; } P = \text{ pile ; } F = \text{face}$$

- Lancer une pièce de monnaie n fois :

$$\Omega = \{P; F\}^n. \ Card\Omega = 2^n \text{ ; } n \geq 2$$

- Lancer un dé cubique :

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

- Lancer un dé cubique n fois :

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}^n. \ Card\Omega = 6^n$$

- Tirages de p boules d'un sac qui contient n boules :

Nombre de tirages :

- Tirage avec remise : $card\Omega = n^p$

- Tirage sans remise : $card\Omega = A_n^p$;

$$A_n^p = n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}; (1 \leq p \leq n)$$

- Tirage simultané : $card\Omega = C_n^p$;

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}; (1 \leq p \leq n)$$

N.B :

- *Tirage exhaustif d'un individu : Tirage sans remise : l'individu n'est pas remis dans la population après avoir été prélevé.*
- *Tirage non exhaustif d'un individu : Tirage avec remise. Un individu peut être choisi plusieurs fois.*

II. Espace probabilisé fini :

1.Définition :

Soit $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \dots; \omega_n\}$ l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire.

Toute application p définie sur $P(\Omega)$ à valeurs dans $[0\,;1]$ vérifiant :

- ✓ $p(\Omega) = 1$
- ✓ Pour tous événements $A et B$ incompatibles on a *:*

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

est appelée une probabilité *sur* Ω.

Le couple $(\Omega\,;p)$ est appelé un espace probabilisé fini.

2.Propriétés :

Soit $(\Omega\,;p)$ un espace probabilisé fini tel que $\Omega = \{\omega_1;\omega_2;\ldots;\omega_n\}$.Alors

- la somme des probabilités des évènements élémentaires est 1 c.à.d.

$$\sum_{i=1}^{n} p(\{\omega_i\}) = 1$$

- Si $A \subset \Omega$ alors :

$$p(A) = \sum_{\omega \in A} p(\{\omega\})$$

- $p(\emptyset) = 0$
- Pour tous événements $AetB$ de Ω *on a :*
  - $A \subset B \Rightarrow p(A) \leq p(B)$
  - $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
  - $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Démonstrations :

+ Comme $\Omega = \cup_{i=1}^{n}\{\omega_i\}$ et $\forall i \neq j: \{\omega_i\} \cap \{\omega_j\} = \emptyset$ alors $\sum_{n}^{i=1} p(\{\omega_i\}) = p(\Omega) = 1$

+ $p(\emptyset) = 1 - p(\overline{\emptyset}) = 1 - 1 = 0$

+ $A \subset B \Rightarrow B = A \cup (B - A)$ et $A \cap (B - A) = \emptyset$ d'où $p(B) = p(A) + p(B - A)$ et $p(B - A) \geq 0\ldots$

+ $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$ découle du fait que : $\overline{A} \cup A = \Omega et \overline{A} \cap A = \emptyset$

+ $A \cup B = A \cup (B - A)$ et $A \cap (B - A) = \emptyset$ donc :

$p(A \cup B) = p(A) + p(B - A)$;

or $B = (A \cap B) \cup (B - A)$ et $(A \cap B) \cap (B - A) = \emptyset$

…d'où le résultat.

III. Probabilité uniforme :

Propriété et définition :

Lorsque tous les événements élémentaires d'un univers ont la même probabilité, on dit qu'il y a équiprobabilité. Dans ce cas, si l'univers Ω est composé de n éventualités $\omega_i, 1 \leq i \leq n$on a :

- ❖ $p(\{\omega_i\}) = \frac{1}{card\Omega}$
- ❖ Et pour tout événement A :

$$p(A) = \frac{cardA}{card\Omega} = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}$$

Cette probabilité est appelée une probabilité uniforme .

Remarques :

- Les expressions suivantes « dé parfait ou équilibré », « boules indiscernables » … indiquent que pour les expériences réalisées, le modèle associé est l'équiprobabilité.
- Le dé (ou pièce de monnaie) est non truqué(e) : chacune des faces à la même chance d'être obtenue. Il s'agit d'une situation d'équiprobabilité. Dans ce cas, il est donc aisé de définir la loi de probabilité :

Exemples :

Pour le dé non truqué (ou bien équilibré):

$$\forall \omega \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}: p(\{\omega\}) = \frac{1}{6}$$

Pour la pièce de monnaie non truquée :

$$p(\{F\}) = p(\{P\}) = \frac{1}{2} \text{ où : } P = \text{ } pile \text{ } et \text{ } F = face$$

Exercice d'application :

On considère une urne contenant 4 boules rouges et une boule jaune. Ces boules sont indiscernables au toucher.

On tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur, on la remet dans l'urne, puis on tire une seconde boule de l'urne.

Quelle est la probabilité pour que la seconde boule soit rouge.

VI. Indépendance – Probabilité conditionnelle :

1.Définition :

Soient $A \text{ et } B$ deux événements tels que $p(A)p(B) \neq 0$.

On appelle « probabilité conditionnelle de A par rapport à B » ou « probabilité de A sachant B » le réel, noté $p_B(A)$ (parfois noté $p(A/B)$)défini par :

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

2.Probabilité d'une intersection :

a.Événements indépendants :

Définition :

Soit A et B deux événements de probabilités non nulles. A et B sont dits indépendants s'ils vérifient l'une des trois conditions équivalentes suivantes :

1) $p_B(A) = p(A)$
2) $p_A(B) = p(B)$
3) $p(A \cap B) = p(A)p(B)$

b.Formule des probabilités composées

Propriété :

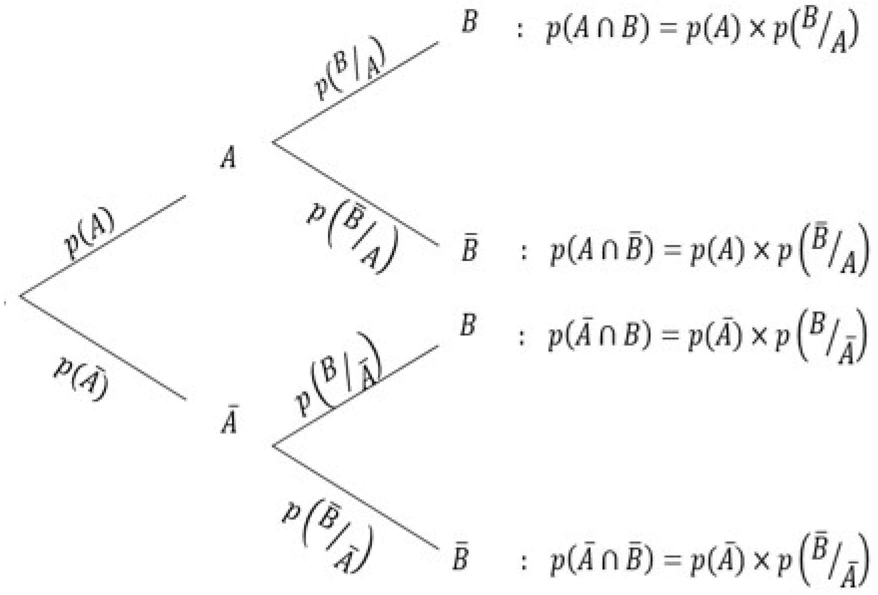
Soit A et B deux événements tels que $p(A)p(B) \neq 0$. On a :

$$p(A \cap B) = p_B(A)p(B)$$

$$p(A \cap B) = p(A)p_A(B)$$

c. Utilisation des arbres pondérés dans le cadre des probabilités conditionnelles

Illustration par un arbre pondéré à 2 niveaux d'une succession de deux épreuves :



Exercice d'application :

Une urne contient 5 boules rouges et 3 boules vertes.
On tire au hasard et sans remise deux boules.
Quelle est la probabilité de tirer deux boules rouges ?
Illustrer votre réponse en utilisant un arbre pondéré.

c.Formule des probabilités totales

Propriété :

Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des événements réalisant une partition de l'univers Ω.

Pour tout événement B on a :

$$B = \bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)$$

$$p(B) = \sum_{i=1}^{n} p(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i) p_{A_i}(B)$$

Exercice d'application :

Une urne U_1 contient 1 boule rouge et 5 boules vertes, une urne U_2 contient 3 boules rouges et une boule verte, une urne U_3 contient 1 boule rouge et 2 boules vertes.

On choisit l'une des urnes au hasard et on tire une boule de cette urne.

Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ?

V. Variables aléatoires :

1.Définition :

Soit $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \ldots; \omega_n\}$l'ensemble des résultats d'une expérience aléatoire.

On appelle variable aléatoire toute fonction $X\ de\ \Omega$ dans $\mathbb{R}$ qui, à tout élément de Ω, fait correspondre un nombre réel x .

- L'événement de Ω, noté $(X = x)$, est l'ensemble des éléments de Ω qui ont pour image x par X.
- $X(\Omega)$, l'ensemble image de Ω par X est l'ensemble de toutes les images des éléments de Ω par X.

2.Loi de probabilité d'une variable aléatoire :

Définition :

Posons $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$

La loi de probabilité de X est la fonction numérique définie sur $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$, qui à chaque valeur x_i fait correspondre le nombre $p_i = p(X = x_i)$

3.Paramètres d'une variable aléatoire

Définitions et propriété :

Soit Ω un ensemble sur lequel a été définie une loi de probabilité définie sur $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$

On note p_i la probabilité de l'événement $(X = x_i)$.

- L'espérance mathématique de la loi de probabilité est le nombre $E(X)$ défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

- La variance de la loi de probabilité est le nombre V défini par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i\big(x_i - E(X)\big)$$

Et on a :

$$V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 \quad .\text{Avec } E(X^2) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^2$$

-L 'écart type de la loi de probabilité est le nombre σ défini par :

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

4.Fonction de répartition :

Définition :

Soi X une variable aléatoire discrète qui prend les valeurs $x_1; x_2; \ldots; x_p$.La fonction de réparition de X est définie par :

$$F: \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \rightarrow & [0;1] \\ x & \mapsto & p(X < x) \end{array}$$

Exercice d'application :

On lance un dé à six faces numérotées de 1 à 6 et on s'intéresse au numéro de sa face supérieure.

On perd 2 dhs si on obtient 1 ou 2, on gagne 0,5 dhs si on obtient 3 et enfin on gagne 1dh si on obtient $4, 5$ ou 6. On appelle X la variable aléatoire qui donne le gain associé à un tirage.

1- Donner la loi de probabilité de X.

2- Calculer l'espérance mathématique de X et interpréter le résultat.

($E(X)$est négative, on peut penser que lors d'un grand nombre de parties le joueur sera perdant.)

3-Calculer la variance et l'écart type de la loi de X

4- Définir la fonction de répartition de X et représenter la graphiquement.

VI. Loi Binomiale :

Définition et propriétés :

On considère une « épreuve de Bernoulli » ayant deux éventualités : l'éventualité S avec la probabilité $p = p(S)$ probabilité d'un succès et l'éventualité $\overline{S}$ avec la probabilité $p(\overline{S}) = 1 - p(S)$.

On répète cette épreuve n fois, de manière indépendante (schéma de Bernoulli) et on note X la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus sur les n répétitions, la loi de probabilité de X est donnée par :

- Les valeurs de X sont : $0; 1; 2; \ldots; n$
- Pour tout $k \in \{0; 1; 2; \ldots; n\}$ on a :

$$p(X = k) = C_n^k [p(S)]^k [1 - p(S)]^{n-k}$$

On dit que X est une loi binomiale de paramètres $n\ et\ p$ et on a :

$E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$

Cette loi est parfois notée $B(n; p)$

Exemples :

- Lancer une pièce de monnaie n fois ; $n \geq 2$
- Lancer un dé n fois ; $n \geq 2$ et s'occuper de la réalistion ou non d'un événement précis.
- Tirage avec remise et s'occuper de l'apparition d'une couleur par exemple.