Structures

Partie II **:** Structures de : Groupe – Anneau – Corps

I. Structure de Groupe

1.Définition :

Soit G un ensemble non vide muni d'une LCI (notée $*$).

(G, $*$) est un groupe si et seulement si :

1) $*$ est associative,

2) $*$ possède un élément neutre dans G

3) et tout élément de G admet un symétrique pour $*$ dans G.

Si de plus, $*$ est commutative, le groupe (G, $*$) est dit commutatif ou abélien

Groupes commutatifs de référence :

•$(\mathbb{Z},+)$, (D,+) $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{C},+)$, $\left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}};+\right)$, F(I,$\mathbb{R}$) avec I $\subset \mathbb{R}$.

•$(\mathbb{Q}^*,\times)$, $(\mathbb{R}^*,\times)$, $(\mathbb{C}^*,\times)$, $(\mathbb{R}^{*+},\times)$

• $(\boldsymbol{M_2}(\mathbb{R}),+)$; $(M_3(\mathbb{R}),+)$

• $(\boldsymbol{P_n},+)$; P_n=ensemble des polynômes à coefficients réels de degré $\leq$ n

• $\left(\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}};\times\right)$; p est un nombre premier positif.

• ($\mathcal{P}(E)$, Δ)

Contre-exemples :

. $(\boldsymbol{M_2}(\mathbb{R}),\times)$; $(M_3(\mathbb{R}),\times)$: la loi × est associative et non commutative et admet un élément neutre : Dans $(\boldsymbol{M_2}(\mathbb{R}),\times)$:$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

. $(\mathbb{Z}^*,\times)$; . $(\mathbb{N},+)$

2.Théorème :

l'image homomorphe d'un groupe est un groupe c.à.d. :

Si f un homomorphisme de *(G, *) vers (F , T) et si (G, *) est un groupe alors (f(G), *) est un groupe.*

3.Equation a$*$x=b

Propriété :

*Soit (G, *) un groupe d'élément neutre e et a,b deux éléments de G.*

- L'équation a$*$x=b admet dans G une unique solution x= a'$*$b

- L'équation x$*$a=b admet dans G une unique solution x= b$*$a'

*Ou a' , b' sont respectivement les symétriques de a,b dans (G, *)*

4. Sous-groupes

Définition :

Soient (G, $*$) un groupe puis H une partie de G.

H est un sous-groupe de (G, $*$) signifie :

H est non vide, stable pour $*$ et, muni de la loi induite, est un groupe.

Remarques :

{e} et G sont des sous-groupes de (G, $*$) appelés sous-groupes triviaux du groupe (G, $*$).
Les autres sous-groupes, s'il en existe, sont appelés sous-groupes propres de (G, $*$).

Propriété caractéristique d'un sous-groupe :

Soient (G, $*$) un groupe puis H une partie de G.

Enoncé 1 :

H est un sous-groupe de (G, $*$) $\Leftrightarrow \begin{cases} H \neq \emptyset \\ \forall (x,y) \in H^2 : x * y' \in H \end{cases}$

Enoncé 2 :

H est un sous-groupe de (G, $*$) $\Leftrightarrow \begin{cases} H \neq \emptyset \\ \forall (x,y) \in H^2 : x * y \in H \\ \forall x \in H : x' \in H \end{cases}$

Remarques :

- Pour la loi + : $x * y' = x - y$ (Notation additive)
- Pour la loi × : $x * y' = x \times y^{-1}$ (Notation multiplicative)

II. Structure d'anneau

1. Distributivité

Soient E un ensemble non vide et $*$ et T deux lois de composition internes sur E.

T est distributive sur $*$ signifie : $\forall (x,y,z) \in E^3 : \begin{cases} xT(y * z) = (xTy) * (xTz) \\ (y * z)Tx = (yTx) * (zTx) \end{cases}$

Si on sait que T est commutative, une et une seule des deux égalités ci-dessus suffit.

Exemples :

Dans C, la multiplication est distributive sur l'addition mais l'addition n'est pas distributive sur la multiplication.

Dans P(E), l'intersection est distributive sur la réunion et la réunion est distributive sur l'intersection.

2.Définition :

Un anneau est un ensemble muni de deux LCI $(A,*,T)$tels que :

• $(A,*)$est un *groupe commutatif* de neutre noté 0_A (zéro de l'anneau).
• La loi T est une LCI sur A *associative et distributive par rapport à* $*$.

Si en plus la loi T admet un neutre différent de 0_A, noté 1_A (unité de l'anneau) on dit que l'anneau $(A,*,T)$ est unitaire.
Si la loi T est commutative, l'anneau est dit commutatif ou abélien.

Anneaux de référence :

• Anneaux commutatifs unitaires :

$(\mathbb{Z},+,\times)$; $(\mathbb{Q},+,\times)$; $(\mathbb{R},+,\times)$; $(\mathbb{C},+,\times)$; $\left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}},+,\times\right)$; ($\mathcal{P}(E)$, Δ ,∩) ;(F(I,$\mathbb{R}$),+ ,×),I ⊂ $\mathbb{R}$; $(\boldsymbol{P_n},+,\times)$

• Anneaux unitaires non commutatifs:

$(\boldsymbol{M_2}(\mathbb{R}),+,\times)$; $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$

Contre-exemple :

(F(I,$\mathbb{R}$),+,o) n'est pas un anneau ! (Pas de distributivité de o / +)

3. Calculs dans un anneau

Théorème :

Soit $(A,*,T)$un anneau. Pour tous *a,b de A on a :*

Notation $(A,*,T)$	*Notation* $(A,+,\times)$
• $aT0_A = 0_ATa = 0_A$.(0_A est absorbant pour la 2ème loi T) • $(aTb)' = a'Tb = aTb'$ • $a'Tb' = aTb$	• $a \times 0_A = 0_A \times a = 0_A$ • $-(a \times b) = (-a) \times b = a \times (-b)$ • $(-a) \times (-b) = a \times b$

a' , b' sont les symétriques de a , b (resp) dans le groupe $(A,*)$

Démonstration

• On a : $a * 0_A = a \Rightarrow (a * 0_A)Ta = aTa \Rightarrow (aTa) * (0_ATa) = aTa \Rightarrow 0_ATa = 0_A$

• $(aTb) * (a'Tb) = (a * a')Tb = 0_ATb = 0_A$ de même $(a'Tb) * (aTb) = 0_A$ donc $(aTb)' = a'Tb$

Ou encore :

$a * a' = 0_A \Rightarrow (a * a')Tb = 0_ATb \Rightarrow (aTb) * (a'Tb) = 0_A$ (1)

Et $a' * a = 0_A \Rightarrow (a' * a)Tb = 0_ATb \Rightarrow (a'Tb) * (aTb) = 0_A$ (2)

De (1) et (2) on en déduit que : $(aTb)' = a'Tb$

de même pour : $(aTb)' = aTb'$

• $a'Tb' = (aTb')' = aTb$

4.Diviseurs de zéro – Anneau intègre

Définitions :

Soit $(A,*,T)$ un anneau.

• Soit *a un élément de A.*
L'élément a est dit « diviseur de zéro » signifie :

$$\begin{cases} a \neq 0_A \\ \exists b \in A - \{0_A\} : aTb = bTa = 0_A \end{cases}$$

• On dit que l'anneau A est ***intègre*** si et seulement s'il ne contient aucun diviseur de zéro c.à.d. : $\forall (a, b) \in A^2, aTb = 0_A \Rightarrow a = 0_A$ ou $b = 0_A$

Exemples de référence :
• Des anneaux intègres : $(\mathbb{Z}, +, \times)$; $(\mathbb{Q}, +, \times)$; $(\mathbb{R}, +, \times)$; $(\mathbb{C}, +, \times)$; $\left(\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}, +, \times\right)$; *p étant un nombre premier positif.*
• Des anneaux non intègres : $(\boldsymbol{M_2}(\mathbb{R}), +, \times)$; $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$; $(F(I, \mathbb{R}), +, \times)$,

Exemples :
- Calculer : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
- Déterminer les diviseurs de zéro dans $\frac{\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}}$

5. Propriété :
Soit $(A, *, T)$ un anneau unitaire et $a \in A$.
Si a est symétrisable dans (A, T) alors a n'est pas un *diviseur de zéro* dans l'anneau$(A, *, T)$

Preuve :
Soit $a`$ le symétrique de a dans (A, T).Pour tout $b \in A$ on a :
$aTb = 0_A \Rightarrow a`T(aTb) = 0_A \Rightarrow b = 0_A$

III. Structure de corps

1.Définition :
*Soit K un ensemble muni de deux LCI * et T .*
(K,,T) est un corps si (K,*,T) est un anneau unitaire dans lequel tout élément distinct de 0_K est symétrisable dans (K-$\{0_K\}$, T)*
Si de plus la 2ème loi T est commutative on dit que (K,,T) est un corps commutatif .*

2. Propriété :
(K,,T) est un corps si et seulement si :*
i. (K,)est un groupe commutatif*
ii. (K-$\{0_K\}$, T) est un groupe
*iii. la 2ème loi T est distributive par rapport à la 1ère loi *.*

3. Propriétés :

Si (K,,T) est un corps alors :*

i. tout élément de K-$\{0_K\}$ est régulier pour T

ii. le corps K ne contient aucun diviseur de zéro

iii. Tout corps est un anneau intègre .la réciproque est fausse.

Corps commutatifs de référence :

$(\mathbb{Q},+,\times)$; $(\mathbb{R},+,\times)$; $(\mathbb{C},+,\times)$; $\left(\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}},+,\times\right)$; *p étant un nombre premier positif.*

Contre-exemple :

$(\mathbb{Z},+,\times)$ est un anneau intègre mais ce n'est pas un corps