Structures algébriques

Partie I : **Généralités**

Activités :

1) Citer les propriétés des opérations suivantes :

   a. L'addition, la soustraction et la multiplication dans $\mathbb{R}$.

   b. La composition des rotations du plan

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(x^2-1)(x+2)=(x^2-1)(x-2)$

I. Loi de composition interne :

1.Définition :

Soit E un ensemble. On appelle « loi de composition interne (LCI) sur E » toute application de $E\times E\ dans\ E$:

$$\begin{array}{ccc} E\times E & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ (x,y) & \longmapsto & x*y \end{array}$$

Un magma est par définition un ensemble muni d'une loi de composition interne.

Exercice d'application :

Pour tous $x\,,y\ \in\ ]-1\,;1[\ :x*y=\frac{x+y}{1+xy}$

Montrer que $*$ est une loi interne sur $]-1\,;1[$

Exemples de LCI :

. L'addition et la multiplication dans :

$\mathbb{N}\,,\mathbb{Z}\,,\mathbb{Q}\,,\mathbb{R}\,,\mathbb{C}\,,{}^{\mathbb{Z}}/_{n\mathbb{Z}}\,,F(I,\mathbb{R})$, avec I un intervalle de $\mathbb{R}$

$F(I,\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions numériques à une variable réelle définies sur I.

P : Ensemble des fonctions polynômes à coefficients réels.

. L'addition dans P_n **:** Ensemble des fonctions polynômes à coefficients réels de degré $\leq n$ avec $n\in\mathbb{N}^*$

. L'intersection $\cap$, la réunion $\cup$, et la différence symétrique Δ dans $P(E)$ ensemble de toutes les parties d'un ensemble E.

Rappel :

Si A et B sont deux parties d'un ensemble E, alors :

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

. Le $PGCD$ et le PPCM dans $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

. La composition des applications dans **:**

- R_Ω *: Ensemble des rotations de même centre Ω*
- H_Ω *: Ensemble des homothéties de même centre Ω*
- T *: Ensemble des translations du plan*

. L'addition et la multiplication dans $M_n(\mathbb{R})$Ensemble des matrices carrées d'ordre $n \in \{2; 3\}$

Dans :$M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$; on définit :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{pmatrix}$$

Et

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$$

Exemple :

Soit E $= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et F $= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

$$E \times F = \begin{pmatrix} 1 \times 4 + 2 \times 3 + 3 \times 1 & 1 \times 2 + 2 \times 1 + 3 \times 3 & 1 \times 5 + 2 \times 4 + 3 \times 6 \\ -2 \times 4 + 3 \times 3 + (-1) \times 1 & -2 \times 2 + 3 \times 1 + (-1) \times 3 & -2 \times 5 + 3 \times 4 + (-1) \times 6 \\ 3 \times 4 + 1 \times 3 + (-2) \times 1 & 3 \times 2 + 1 \times 1 + (-2) \times 3 & 3 \times 5 + 1 \times 4 + (-2) \times 6 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow E \times F = \begin{pmatrix} 13 & 13 & 31 \\ 0 & -4 & -4 \\ 13 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Exercices d'application :

On considère dans $M_3(\mathbb{R})$ les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} ; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer $A + B$; $B + A$; $A \times B$; $B \times A$; $(A \times B) \times C$ et $A \times (B \times C)$

Que remarquez-vous ?

2. Partie stable par une LCI, loi induite

Définition :

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne *. Soit F une partie de E.

« F est stable par $*$ » signifie que : $\forall (x, y) \in F^2 : x * y \in F$

Si F est une partie stable par $*$, alors la restriction de $*$ à F est une loi de composition interne sur F dite « loi induite par $*$ dans F ».

Exemples :

1) $\mathbb{R}^{+*}$ est une partie stable de $(\mathbb{R}, \times)$

2) $\mathbb{R}^{-*}$ n'est pas une partie stable de $(\mathbb{R}, \times)$

Car : $-1 \in \mathbb{R}^{-*}$ $et -2 \in \mathbb{R}^{-*}$ $mais$ $(-1) \times (-2) = +2 \notin \mathbb{R}^{-*}$

3) $[0; 1]$ est une partie stable de $(\mathbb{R}, \times)$

4) $[0; 1]$ n'est pas une partie stable de $(\mathbb{R}, +)$

Car $\frac{1}{2} \in [0; 1]$ $et \frac{3}{4} \in [0; 1]$ $mais \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4} \notin [0; 1]$

Exercices d'application :

1) Soit $U = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$

Montrer que U est une partie stable de $(\mathbb{C}, \times)$

La partie U est-elle stable dans $(\mathbb{C}, +)$? justifier votre réponse.

2) On munit $\mathbb{R}$ de la loi interne T définie par : $x \, T \, y = xy - 3x - 3y + 12$

Montrer que l'intervalle $]3; +\infty[$ est stable dans $(\mathbb{R}, T)$

3. Propriétés d'une LCI et Eléments particuliers

Définitions et propriétés :

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne $*$.

. «$*$est commutative » signifie que : $\forall (x, y) \in E^2 : x * y = y * x$

. «$*$est associative » signifie que : $\forall (x, y, z) \in E^3 : (x * y) * z = x * (y * z)$

. L'élément e de E est un élément « neutre » de $(E, *)$ signifie que :

$\forall x \in E : x * e = e * x = x$

Cet élément s'il existe est unique.

Et on a :

$(E,*)$ admet un élément neutre $\Leftrightarrow (\exists!\, e \in E / \forall x \in E : x * e = e * x = x)$

. L'élément x *de* E admet : « un symétrique x' » signifie que :

$$x * x' = x' * x = e$$

On dit alors que « x est symétrisable ».

Si la loi $*$ est associative alors ce symétrique est unique.

. Soit $a \in E$. a est élément absorbant pour la loi $*$ signifie que :

$$\forall x \in E : a * x = x * a = a$$

. Soit $a \in E$.

a est régulier (simplifiable) pour $*$ signifie que :

$$\forall (x,y) \in E^2 : \begin{cases} x * a = y * a \\ a * x = a * y \end{cases} \Rightarrow x = y$$

Exemples de référence :

- Dans $M_2(\mathbb{R})$
  - La loi $+$ est commutative, associative, admet $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ comme élément neutre et toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ admet une matrice symétrique appelée matrice opposée de A et notée : $-A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$
  - La loi $\times$ n'est pas commutative
  - La loi $\times$ est associative, admet $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ comme élément neutre
- Dans $M_3(\mathbb{R})$
  - La loi $+$ est commutative, associative, admet $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ comme élément neutre et toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a" & b" & c" \end{pmatrix}$ admet une matrice symétrique appelée matrice opposée de A et notée :

$$-A = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -a' & -b' & -c' \\ -a" & -b" & -c" \end{pmatrix}$$

- La loi $\times$ n'est pas commutative
- La loi $\times$ est associative, admet $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ comme élément neutre
- Si une matrice A admet une matrice symétrique B pour la loi $\times$, alors on a :

$$A \times B = B \times A = I$$

La matrice B sera appelée la matrice inverse de A et sera notée A^{-1}

Exercices d'application :

Exercice 1 :

On munit $\mathbb{R}$ de la loi interne T définie par : $x\ T\ y = xy - 3x - 3y + 12$

1) Montrer que la loi T est commutative et associative

2) Montrer que la loi T admet un élément neutre

3) Montrer que tout élément de $\mathbb{R}$ est symétrisable pour la loi T.

Exercice 2 :

On munit $\mathbb{N}^*$ de la loi interne $\perp$ définie par : $a\ \perp b = a^b$.

(Le symbole $\perp$ se lit antitruc)

1) Montrer que la loi $\perp$ n'est ni commutative, ni associative.

2) Calculer $a\ \perp 1$ pour tout $a \in \mathbb{N}^*$.

3) La loi $\perp$ admet-elle un élément neutre ?

5. Théorème :

Soient E un ensemble non vide puis $*$ une loi de composition interne sur E, associative et admetant un élément neutre e.

Soient $x\ et\ y$ deux éléments de E. Si $x\ et\ y$ sont symétrisables, alors $x\ *\ y$ est symétrisable et on a :

$$(x\ *\ y)' = y'\ *\ x'$$

Exemples :

- Dans $\mathbb{C}$: $-(z + z') = (-z) + (-z')$
- Dans $\mathbb{C}^*$: $(z \times z')^{-1} = z^{-1} \times z'^{-1}$

- Dans l'ensemble des bijections d'un ensemble E sur lui-même, la réciproque de $g \circ f$ est $f^{-1} \circ g^{-1}$, c.à.d. :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Exercices d'application :

Vérifier que la matrice $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

En déduire que la matrice $A \times B$ est inversible et calculer son inverse.

II. Homomorphisme :

1.Définition :

Soient E et F deux ensembles munis des LCI $* \ et\ T$ respectivement.

Un homomorphisme de $(E,*)\ vers\ (F\ ,T\ )$ est une application f de E vers F vérifiant :

$$\forall (x,y)\ \in E^2 : f(x\ *\ y)\ =\ f(x)\,T\,f(y)$$

Si en plus f est bijective on dit que f est un isomorphisme de $(E,*)\ vers\ (F,T)$

Exemples :

- ✓ *La fonction ln est un* isomorphisme de $(\mathbb{R}^{*+},\times)$ vers $(\mathbb{R},+)$, en effet :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{*+} : \ln(x \times y) = lnx + lny$$

De plus la fonction $\ln$ *réalise une bijection de* $\mathbb{R}^{*+}$*vers* $\mathbb{R}$

- ✓ *De même la fonction* $exp : x \mapsto e^x$ *est un* isomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers$(\mathbb{R}^{*+},\times)$, en effet :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$$

De plus la fonction $\exp$ *réalise une bijection de* $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}^{*+}$

- ✓ *La fonction signe :*

$$sgn \ : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \{-1;1\} \\ x & \longmapsto & sgn(x,y) = \begin{vmatrix} +1\ si\ x > 0 \\ -1\ si\ x < 0 \end{vmatrix} \end{array}$$

Est un homomorphisme (non bijectif) de $(\mathbb{R}^*\ ,\times)\ vers\ (\{-1;1\}\ ,\times)$

2.Propriétés :

Soit f un homomorphisme de $(E,*)\ vers\ (F\ ,T\ )$.

• $f(E)$ est une partie stable de (F, T).

• Si $*$ est associative dans E $alors$ T est associative dans $f(E)$

• Si $*$ est commutative dans E $alors$ T est commutative dans $f(E)$

• Si e est l'élément neutre de $(E,*)$ alors $f(e)$ est l'élément neutre de $(f(E), T)$.

• Si $x \in E$ admet un symétrique x' $dans$ $(E,*)$ $alors$ $f(x')$ est le symétrique de l'élément $f(x)$ $dans$ $(f(E), T)$.

Exercices d'application :

Exercice 1 :

Soient les ensembles $E = \{e^{i\alpha} / \alpha \in \mathbb{R}\}$ et $F = \left\{M_\theta = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} / \theta \in \mathbb{R}\right\}$

1) Montrer que l'application :

$$f \;:\; \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathrm{F} \\ e^{i\alpha} & \longmapsto & M_\alpha \end{array}$$

est un homomorphisme surjectif de $(E, \times)$ vers $(F, \times)$. Est-il bijectif ?

2) En déduire :

a. la loi $\times$ est commutative et associative dans F

b. L'élément neutre de $(F, \times)$

c. L'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

d. A^n en fonction de n.

Exercice 2 :

1) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculer $A \times B$, $(A \times B)^2, A^2, B^2$

2) L'application :

$$\varphi \;:\; \begin{array}{ccc} M_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_2(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & X^2 \end{array}$$

est-elle un homomorphisme de $(M_2(\mathbb{R}), \times)$ vers $(M_2(\mathbb{R}), \times)$?