# Structures algébriques

# Partie III : Espaces vectoriels réels

## *I. Définition et règles de calculs*

### *1. Définition :*

Un espace vectoriel réel est un ensemble E muni d'une loi de composition interne notée *« + »* et d'une loi de composition externe notée c.à.d. une application de $\mathbb{R} \times E$ dans $E$ notée :

$$\mathbb{R} \times \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$$

$$(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{u}) \mapsto \boldsymbol{\lambda}.\boldsymbol{u}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

. $(E , +)$ est un groupe commutatif

. et pour tout $(u, v)$ $de$ $E^2$ et tout $(\alpha, \beta)$ $de$ $\mathbb{R}^2$ on a :

- $(\alpha + \beta).u = (\alpha.u) + (\beta.u)$
- $(\alpha\beta).u = \alpha.(\beta.u)$
- $\alpha.(u + v) = \alpha.u + \alpha.v$
- $1.u = u$

On le note $(E, +, \cdot)$

***Espaces vectoriels réels de référence***

- ✓ $(\mathbb{R}, +, \cdot)$
- ✓ $(\mathbb{C}, +, \cdot)$
- ✓ $(\mathrm{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, .)$ *: ensemble des fonctions définies de* $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$
- ✓ $(P, +, .)$ *: ensemble des fonctions polynômes définies sur* $\mathbb{R}$ *et à coefficients réels.*
- ✓ $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *;* $(M_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$

  *La multiplication externe étant définie dans* $M_2(\mathbb{R})$ *par :*

$$\lambda.\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$$

- ✓ $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ ; $n \in \mathbb{N}$ *et* $n \geq 2$

  *La multiplication externe étant définie dans* $\mathbb{R}^n$ *par :*

$$\lambda.(a_1, a_2, \dots, a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n)$$

## *2. Propriétés :*

Soit $(E,+,\ \cdot)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. et pour tout $(u,v)$ de $E^2$ et tout $(\alpha,\beta)$ de $\mathbb{R}^2$ on a :

. $0.u = 0_E$ *et* $\alpha.0_E = 0_E$

. $(\alpha-\beta).u = (\alpha.u)-(\beta.u)$

. $\alpha.(u-v) = \alpha.u - \alpha.v$

. $-(\alpha.u) = (-\alpha).u = \alpha.(-u)$

## *II. Combinaisons linéaires – Famille génératrice*

### *1.Définition :*

Soit $u$ , $u_1$ , $u_2$ ,…, $u_n$, des vecteurs d'un espace vectoriel réel $(E,+,\ \cdot)$.

Dire que $u$ est une combinaison linéaire des vecteurs $u_1$ , $u_2$ ,…, $u_n$ signifie que :

$$\exists(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n : u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n$$

### *Exercice d'application :*

Montrer que dans l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ le vecteur $w=(1;-1)$ est une combinaison linéaire de $u=(0;1)$ *et* $v=(2\,;1)$

### *2. Famille génératrice d'un espace vectoriel*

***Définition :***

La famille $B=(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une famille génératrice de l'espace vectoriel $(E,+,\ \cdot)$ signifie que :

$$\forall u\in E ; \exists(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n : u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n$$

On dit aussi que la famille $B=(u_1, u_2, \dots, u_n)$ engendre l'espace vectoriel $(E,+,\ \cdot)$

***Exemple :***

*On considère dans* $P_1$ *; f et g telles que :* $f(x)=x+1$ *et* $g(x)=1-x$

*Montrer que la famille* $(f\ ,g)$ *engendre* $P_1$

## *III. Dépendance et indépendance linéaire*

### *1. Définitions :*

*Soit* $B = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ *est une famille de vecteurs d'un espace vectoriel* $(E, +, \cdot)$.

**.** *B est une **famille libre** de* $(E, +, \cdot)$ *signifie :*

$$\forall(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n : \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

*Et on dit que les vecteurs* $u_1, u_2, \dots, u_n$ *sont **linéairement indépendants**.*

**.** *B est une **famille liée** de* $(E, +, \cdot)$ *signifie :*

$$\exists(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n - \{(0; 0; \dots; 0)\} : \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = 0_E$$

c.à.d. l'un de ses éléments est combinaison linéaire des autres.

*Et on dit que les vecteurs* $u_1, u_2, \dots, u_n$ *sont **linéairement dépendants**.*

### *Exercice d'application*

*On considère dans* $\boldsymbol{M_2}(\mathbb{R})$ *les matrices :*

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} ; K = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; L = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

*1- Calculer* $J - L$

*2- Montrer que* $(J, K, L)$ *est une famille liée*

*3- Montrer que* $(J, K)$ *est une famille libre.*

### *2. Propriétés :*

**.** Si l'une des sous-familles d'une famille est liée (en particulier si deux de ses vecteurs sont colinéaires ou si l'un d'entre eux est nul), alors cette famille est liée.

**.** ***Autrement dit,*** si une famille est libre, alors toutes ses sous-familles sont libres.

## *IV. Sous espace vectoriel*

### *1. Définition :*

*Un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel* $(E, +, \cdot)$, *est une partie non vide F, vérifiant :*

**.** *F est stable par combinaisons linéaires*

**.** $(F, +, \cdot)$ *est un espace vectoriel*

***Exemples :***

**.** $(\mathbb{R}, +,\cdot)$ est un sous espace vectoriel réel de$(\mathbb{C}, +,\cdot)$

**.** $(\boldsymbol{P_n}, +, .)$ est un sous espace vectoriel réel de (F(ℝ,ℝ),+, .)

## *2. Propriétés caractéristiques :*

***Énoncé 1 :***

*Une <u>partie</u> F d'un espace vectoriel* $(E, +, \cdot)$ *est sous-espace vectoriel de E signifie :*

**.** *F est non vide*

**.** $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ , $\forall(u, v) \in F^2 : \alpha u + \beta v \in F$

***Énoncé 2 :***

*Une <u>partie</u> F d'un espace vectoriel E est sous-espace vectoriel de E signifie :*

**.** *F est non vide*

**.** , $\forall(u, v) \in F^2 : u + v \in F$

**.** $\forall\alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in F: \alpha u \in F$

***Exercices d'application***

**.** Montrer que l'ensemble $F = \{(x, y)/x + y = 1\}$ n'est pas un sous espace vectoriel de$(\mathbb{R}^2, +,\cdot)$

**.** Montrer que l'ensemble $F = \left\{M(a, b) = \begin{pmatrix} b - a & a \\ 2b & a + b \end{pmatrix} / (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$ est un sous espace vectoriel de$(M_2(\mathbb{R}), +,\cdot)$

## *V. Bases d'un espace vectoriel :*

### *1. Définition :*

*Soit* $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ *une famille de vecteurs d'un espace vectoriel* $(E, +, \cdot)$ *réel.*

*B est une base de* $(E, +, \cdot)$ *signifie que :*

$$\forall u \in E; \exists!\, (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n: u = x_1u_1 + x_2u_2 + \dots + x_nu_n$$

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *est le n-uplet des coordonnées de u dans la base B ,et on écrit :*$u(x_1, x_2, \dots, x_n)_B$

***Exemple de bases canoniques d'espaces vectoriels réels***

. $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ : $B=(e_1,e_2)$ ; $e_1=(1;0)$ et $e_2=(0;1)$

. $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ **:** $B=(E_1,E_2,E_3,E_4)$ *avec :*

$E_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ ; $E_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ ; $E_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ ; $E_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

. $(\mathbb{R},+,\cdot)$ : $B=(e)$ avec : $e=1$

. $(\mathbb{C},+,\cdot)$ : $B=(e_1,e_2)$ *avec* $e_1=1$ et $e_2=i$

. $(P_n,+,.)$ : $B=(e_0,e_1,e_2,\dots,e_n)$ avec :

$\forall x\in\mathbb{R}:e_0(x)=1,\ e_1(x)=x\ ,e_2(x)=x^2,\dots,e_0(x)=x^n$

. $(\mathbb{R}^n,+,\cdot)$ ; $n\in\mathbb{N}$ *et* $n\geq 2$ *:*

$B=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ *avec* $e_i=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ *et* $x_i=1$ *;* $x_j=0$ *pour tout* $j\neq i$

## *2. Propriété :*

*Soit B une famille de vecteurs d'un espace vectoriel* $(E,+,\ \cdot)$ *réel. On a :*

*B est une base de E si et seulement si B est une famille génératrice et libre de E*

## *Exercices d'application*

### *Exercice 1 :*

*On considère l'ensemble E=*$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/2x=z-y\}$

*1) Montrer que E est espace vectoriel réel*

*2) Déterminer une base B de E.*

### *Exercice 2 :*

Montrer que les ensembles suivants ne sont pas des espaces vectoriels réels :

1. $F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/2(x-1)=y\}$
2. $H=\left\{\begin{pmatrix}2x&x\\-x&x^2\end{pmatrix}/x\in\mathbb{R}\right\}$
3. $G=\{x\in\mathbb{Z}/1<E(x^2)<3\}$

### *3. Dimension d'un espace vectoriel réel*

***Théorème de la dimension finie (admis) et définition***

*Si un espace vectoriel* $(E,+,\ \cdot)$ *admet une base finie de cardinal* $n \in \mathbb{N}^*$ *alors toutes les bases de E ont le même nombre n d'éléments.*

*Ce nombre s'appelle la dimension de* $(E,+,\ \cdot)$*et est noté :*$dim_{\mathbb{R}}\, E = n$

***Exemples de référence :***

. $dim_{\mathbb{R}}\, \mathbb{R} = 1$

. $dim_{\mathbb{R}}\, \mathbb{C} = 2$

. $dim_{\mathbb{R}}\, \mathbb{R}^n = n$

. $dim_{\mathbb{R}}\, P_n = n + 1$

. $dim_{\mathbb{R}}\, M_2\, (\mathbb{R}) = 4$

. $dim_{\mathbb{R}}\, M_3\, (\mathbb{R}) = 9$

### *4. Théorème :*

- *Si* $B = (e_1, e_2)$ *est une base d'un espace vectoriel réel* $(E,+,\ \cdot)$ *de dimension 2 et si B'=*$(e'_1, e'_2)$ *est une famille de de 2 vecteurs de E alors :*

  *B'=*$(e'_1, e'_2)$ *est une base de* $(E,+,\ \cdot) \Leftrightarrow$ *B' est une famille libre de* $(E,+,\ \cdot)$

  $\Leftrightarrow$ *B' est une famille génératrice de* $(E,+,\ \cdot)$

  $\Leftrightarrow det_B\, \mathrm{B'} \neq 0$

- *De même si* $B = (e_1, e_2, e_3)$ *est une base d'un espace vectoriel réel* $(E,+,\ \cdot)$ *de dimension 3 et si B'=*$(e'_1, e'_2, e'_3)$ *est une famille de de3 vecteurs de E alors :*

  *B'=*$(e'_1, e'_2, e'_3)$ *est une base de* $(E,+,\ \cdot)\Leftrightarrow$ *B' est une famille libre de* $(E,+,\ \cdot)$

  $\Leftrightarrow$ *B' est une famille génératrice de* $(E,+,\ \cdot)$

  $\Leftrightarrow det_B\, \mathrm{B'} \neq 0$

***Exercices d'application***

*1) Montrer que la famille (1-i,1+i) est une base de* $(\mathbb{C},+,\cdot)$

*2) On pose* $u_1 = (1;-1;0)$ *;* $u_2 = (0;1;-2)$ *et* $u_3 = (3;2;1)$

*Montrer que* $(u_1\, , u_2\, , u_3\, )$ *est une base de l'espace vectoriel* $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$

*3) On pose :*

$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = x^2 + x\ ,\ g(x) = -2x^2 + x - 1$ *et* $h(x) = x^2 + 2x + 3$

*Montrer que* $(f, g, h)$ *est une base de l'espace vectoriel* $(P_2,+,\cdot)$