Analytique du produit scalaire dans le plan

Etude analytique du cercle

Niveau : 1ère Sciences expérimentales

Rappels

- Pour tous les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls on a : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

Et on a : $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$

- Aire d'un triangle ABC : $S = \frac{1}{2}.AB.AC.\sin(\widehat{BAC})$

- Norme de $\vec{u}$: $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$

- Distance de 2 points A et B : $AB = \sqrt{\left(\overrightarrow{AB}\right)^2}$

Dans tous les paragraphes de cette leçon, on considérera que le plan ($\mathcal{P}$) est rapporté à un repère orthonormé $(\boldsymbol{O};\vec{\imath},\vec{\jmath})$

I. EXPRESSION ANALYTIQUE DU. PRODUIT SCALAIRE

1.Propriété :

Pour tous vecteurs $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$ on a : $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$

<u>Démonstration :</u>

$$\begin{aligned}\vec{u}.\vec{v} &= (x\vec{\imath} + y\vec{\jmath})(x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}) \\ &= xx'\vec{\imath}.\vec{\imath} + xy'\vec{\imath}.\vec{\jmath} + yx'\vec{\jmath}.\vec{\imath} + yy'\vec{\jmath}.\vec{\jmath} \\ &= xx'\|\vec{\imath}\|^2 + xy'\vec{\imath}.\vec{\jmath} + yx'\vec{\jmath}.\vec{\imath} + yy'\|\vec{\jmath}\|^2 \\ &= xx' + yy'\end{aligned}$$

Car $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1$, le repère étant normé,

Et $\vec{\imath}.\vec{\jmath} = \vec{\jmath}.\vec{\imath} = 0$, le repère étant orthogonal.

Exercices d'application :

Exercice 1 :

On donne $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$ et $\vec{v}\left(3; -\frac{1}{2}\right)$.

Calculer le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$. Que peut-on dire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

Exercice 2 :

Sachant que : $\vec{\imath}.\vec{u} = -2 \;\; et\, \vec{\jmath}.\vec{u} = 3$, quel est le couple de coordonnées du vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$?

Exercice 3 :

Déterminer les valeurs du paramètre réel m pour que les deux vecteurs $\vec{u}(m, -2+m)$ et $\vec{v}(m-4, m+1)$ soient orthogonaux.

2.Norme d'un vecteur et distance de 2 points

Propriétés

- ► La norme d'un vecteur $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ est : $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2}$
- ► La distance entre deux points $A(x_A\,;\, y_A)$ et $B(x_B\,;\, y_B)$ est :

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Exercice d'application :

On considère les points $A(1,-3)\,;\; B(3,7)\; et\; C(-3,1)$.

1) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$, en déduire la nature du triangle ABC.

2) Calculer l'aire du triangle ABC.

3) Calculer $\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\|$

3.Expression analytique du cosinus et du sinus

Propriété :

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs non nuls et θ une mesure de l'angle *orienté* $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.

On a :

$$cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|} = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

Et

$$sin\theta = \frac{\det(\vec{u},\vec{v})}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|} = \frac{xy' - x'y}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

Conséquence :

Si ABC est un triangle, alors l'aire de ce triangle est :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\right|$$

Exercice :

On considère les points $A(5;0)$ *et* $B(2;1)$ *et* $C(6;3)$

1)Calculer $cos(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})$ et $sin(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})$

2) En déduire une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}})$

3) Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle en A.

II. Équation de droite de vecteur normal donné

Rappel :

Vecteur directeur $\vec{u}$ d'une droite (Δ).

$$(\Delta) = \{M \in (P);\ \overrightarrow{AM} = \lambda\,\vec{u}\,\}$$

Dans un repère cartésien du plan si (Δ) a pour équation cartésienne

$ax + by + c = 0$; alors $\vec{u}(-b\,;a)$ est un vecteur directeur de (Δ)

1.Définition :

On appelle **vecteur normal** à une droite (Δ), un vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de (Δ)

2. Propriétés :

- Une droite (Δ) de vecteur normal $\vec{n}(a\,;b)$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ où c est un nombre réel à déterminer.

- Réciproquement, la droite(Δ)d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ admet le vecteur $\vec{n}(a\,;b)$ pour vecteur normal.

- Et on a : $(\Delta) = \{M \in (P);\ \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0\,\}$

Démonstrations :

- Soit un point A$(x_A\ ;\ y_A)$ de la droite *d*.

M$(x\,;y)$ est un point de (Δ) si et seulement si $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ sont orthogonaux. Soit : $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$

Soit encore : $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$ c.à.d. $ax + by - ax_A - by_A = 0$.

- Si $ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne de (Δ) alors $\vec{u}(-b\,;a)$ est un vecteur directeur de (Δ).

Le vecteur $\vec{n}\binom{a}{b}$ vérifie : $-b \times a + a \times b = 0$. Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.

3. Distance d'un point par rapport à une droite.

Définition :

Soient (Δ) une droite et A un point dans le plan.

La distance du point A à la droite (Δ) est la distance AH où H est la projection orthogonale de A sur (Δ)

Théorème :

Soient la droite (Δ): $ax + by + c = 0$ et $A(x_A\,;\,y_A)$ un point dans le plan.

La distance du point A à la droite (Δ) est :

$$d\big(A,(\Delta)\big) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

II. Étude analytique du cercle :

Rappels

► Soit Ω un point du plan et r un nombre réel strictement positif.

Le cercle de centre Ω et de rayon r est l'ensemble des points M du plan tels que $\Omega M = r$.

On le note $C(\Omega, r)$

► Si $[AB]$ est un diamètre d'un cercle C, alors Pour tout point M de C distinct de $A\ et\ de\ B$ on a $(MA) \perp (MB)$

1.Equation d'un cercle :

Propriétés :

► Tout cercle $C(\Omega(a,b);\ r)$ du plan (P) a pour équation cartésienne :

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

► L'équation cartésienne du cercle ($\boldsymbol{C}$) de diamètre $[AB]$ est : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

c.à.d. $(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0$

Exercices:

1) Montrer que l'équation du cercle C de centre $\Omega(3;-2)$ et de rayon $r=\sqrt{5}$ s'écrit :

$$x^2+y^2-6x+4y+8=0$$

2) Déterminer une équation du cercle *C* de centre $A(-1\,;2)$ et passant par le point $B(2\,;-2)$.

3) Ecrire une équation du cercle de diamètre $[AB]$.

2. Représentation paramétrique d'un cercle :

Propriété :

$C(\Omega(a,b);r)$ est un cercle du plan (P) .

Pour tout point $M(x,y)$ du plan (P) , On a :

$$\begin{cases} x=a+r\,cos\theta \\ y=b+r\,sin\theta \end{cases}\ ;\ \theta\in\mathbb{R}$$

Où $\theta\equiv(\widehat{\vec{\imath}\,;\,\overrightarrow{\Omega M}})$.

On l'appelle représentation paramétrique du cercle $C(\Omega(a,b);r)$.

Preuve :

Soit le cercle $C(\Omega(a,b);\ r)$ d'équation cartésienne :

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

On a :

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \Leftrightarrow \left(\frac{x-a}{r}\right)^2+\left(\frac{y-b}{r}\right)^2=1$$

$$\Leftrightarrow \exists\ \theta \in \mathbb{R} \Big/ \begin{cases} \dfrac{x-a}{r}=cos\theta \\ \dfrac{y-b}{r}=sin\theta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists\ \theta \in \mathbb{R} / \begin{cases} x=a+r\ cos\theta \\ y=b+r\ sin\theta \end{cases}$$

Exercice d'application :

Ecrire une équation cartésienne du cercle de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=-1+\sqrt{2}sint \\ y=2+\sqrt{2}cost \end{cases} ;t\in\mathbb{R}$$

3. Etude de l'ensemble des points $\boldsymbol{M(x,y)}$ tels que $\boldsymbol{x^2+y^2+ax+by+c=0}$

Propriété :

L'ensemble des points $M(x,y)$ du plan (P) vérifiant l'équation :

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

est :

► vide ssi $a^2+b^2-4c<0$

► formé par un seul point ssi $a^2+b^2-4c=0$

► un cercle ssi $a^2+b^2-4c>0$

Exercices d'application :

Déterminer l'ensemble (E) dans les cas suivants :

1) $(E) : x^2 + y^2 - 20x - 12y + 123 = 0$

2) $(E) : x^2 + y^2 - x + 3y + 11 = 0$

3) $(E) : x^2 + y^2 + 6x - 8y + 25 = 0$

4. Etude de la position relative d'un cercle et d'une droite :

1. Définition :

Soient (C) un cercle du centre Ω et de rayon r et M un point dans le plan (P)

► $\Omega M > r$ signifie que le point M est à l'extérieur du cercle (C)

► $\Omega M < r$ signifie que le point M est à l'intérieur du cercle (C)

Exercices d'application :

On considère le cercle (C) de centre $\Omega(10; 6)$ et de rayon $r = \sqrt{13}$

Etudier la position relative du cercle (C) par rapport aux points :

$$A(7; 4) \; ; \; B(6; 6) \; \; et \; C(9; 3)$$

2. Propriété :

Soient (C) un cercle du centre Ω $et\ de\ rayon\ r\ et$ (D) une droite dans le plan (P).

¬ $d(\Omega; (D)) > r$ signifie que la droite (D) est à l'extérieur du cercle (C)

¬ $d(\Omega; (D)) = r$ signifie que la droite (D) est à l'intérieur du cercle (C)

¬ $d(\Omega; (D)) < r$ signifie que la droite (D) coupe le cercle (C) en deux points.

Exercices d'application :

On considère le cercle (C) de centre $\Omega(10; 6)$ et de rayon $r = \sqrt{13}$

1) Montrer que la droite $(\Delta_1): x + y = 10$ ne coupe pas le cercle (C)

2) Montrer que la droite $(\Delta_2): 3x + 2y = 29$ coupe pas le cercle (C) en un seul point dont on déterminera le couple de coordonnées.

3) Montrer que la droite $(\Delta_3): x = y$ coupe pas le cercle (C) en deux points distincts dont on déterminera les couples de coordonnées.

5. Équation d'une droite tangente à un cercle en un point donné de ce cercle :

Propriété :

Soient (C) un cercle du centre $\Omega(a, b)$ et $A(x_A\ ;\ y_A\ ) \in (C)$.

On considère la tangente (T) du cercle (C) $en\ point\ A$. Le vecteur $\overrightarrow{\Omega A}$ est normal à (T) et on a pour tout point M du plan (P) :

$$M \in (T) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega A} \,.\, \overrightarrow{AM} = 0$$

Exercice d'application :

On considère les points $A(2\ ;\ 1)\ et\ B(-4\ ;\ -1)$.

1) Déterminer le centre et calculer le rayon de ce cercle.

2) Déterminer une équation du cercle C de diamètre $[AB]$.

3) Montrer que le point $I(-2\ ;\ 3)$ appartient à C.

4) Déterminer une équation de la tangente à C en A.

5) Faire une représentation graphique de tous ce qui précède.