

Etude analytique de l'espace

Niveau : 1^{ère} Sciences expérimentales

I. Repère cartésien de l'espace

1. Définition :

Soient $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$ trois vecteurs non coplanaires, O, I, J et K quatre points de l'espace non coplanaires.

Le quadruplet $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est appelé un repère cartésien d'origine O de l'espace, et le triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de l'espace.

On considère dans toute la suite de ce cours que l'espace est muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

2. Propriété :

Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet (x, y, z) de nombres réels tel que :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Le triplet (x, y, z) est appelé triplet des coordonnées du point M et on

écrit : $M(x, y, z)$ et $\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$: x est l'abscisse, y est l'ordonnée et

z est la cote.

3. Coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$, $\lambda \cdot \vec{u}$, \overrightarrow{AB} et du milieu d'un segment

Propriétés :

➤ Si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de l'espace et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors :

$$\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix} \text{ et } \lambda \cdot \vec{u} \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$$

➤ Si $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ sont 2 et I est le milieu du segment $[AB]$ points de l'espace alors :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} \text{ et } I \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right)$$

II. Condition analytique de colinéarité (coplanarité) de 2(3) vecteurs de l'espace

1. Propriété :

Deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si les 3

déterminants extraits de \vec{u} et \vec{v} sont nuls, c.à.d.

$$\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} = 0$$

Exercices d'application :

1) Montrer que les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} \sqrt{8} \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ sont colinéaires

2) Montrer que les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires

3) Montrer que les points $A(-1; -1; 1)$, $B(2; 5; 10)$ et $C(-3; -5; -5)$ sont alignés.

2. Déterminant de 3 vecteurs :

Définition :

Le déterminant de 3 vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$ est le nombre réel :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$$

Théorème :

Trois vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} de l'espace sont coplanaires, si et seulement s'il existe un couple de réels $(\alpha ; \beta)$ tel que $\vec{u} = \alpha \vec{v} + \beta \vec{w}$ si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$

Exercices d'application :

- 1) Montrer que les vecteurs $\vec{u}(4; 2; 4)$, $\vec{v}(1; 0; 2)$ et $\vec{w}(-2; -2; 0)$ sont coplanaires
- 2) Montrer que les points $A(2; 0; 2)$, $B(1; -2; 0)$, $C(1; -1; 1)$ et $D(0; 1; -1)$ ne sont pas coplanaires

III. Analytique de la droite dans l'espace

1. Représentation paramétrique de la droite dans l'espace

Théorème et définition :

La droite (Δ) passant par le point $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ est

l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $:\vec{AM} = t\vec{u}$ avec $t \in \mathbb{R}$ c.à.d :

$$\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

Ce système d'équations est appelé une représentation paramétrique de la droite (Δ) dans l'espace

2. Deux équations cartésiennes d'une droite de l'espace

Propriétés :

La droite (Δ) passant par le point $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ est

l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que : \overrightarrow{AM} et \vec{u} soient colinéaires c.à.d :

$$\begin{vmatrix} x - x_A & \alpha \\ y - y_A & \beta \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} y - y_A & \beta \\ z - z_A & \gamma \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} x - x_A & \alpha \\ z - z_A & \gamma \end{vmatrix} = 0$$

Dans le cas où $\alpha\beta\gamma \neq 0$ ces équations s'écrivent : $\frac{x-x_A}{\alpha} = \frac{y-y_A}{\beta} = \frac{z-z_A}{\gamma}$

Exercices d'application :

Soit la droite (Δ) passant par les points $A(-1; 2; 3)$ et $B(1; 1; 1)$

- 1) Ecrire une représentation paramétrique de la droite (Δ)
- 2) Ecrire de 2 façons distinctes 2 équations cartésiennes de la droite (Δ)

IV. Analytique du plan dans l'espace

1. Représentation paramétrique du plan dans l'espace

Théorème et définition :

Le plan (P) passant par le point $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et

$\vec{u}' \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$ est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que : $\overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{u}'$ avec

$(t, t') \in \mathbb{R}^2$ c.à.d :

$$\begin{cases} x = x_A + \alpha t + \alpha' t' \\ y = y_A + \beta t + \beta' t' \\ z = z_A + \gamma t + \gamma' t' \end{cases} ; (t, t') \in \mathbb{R}^2$$

Ce système d'équations est appelé une représentation paramétrique du plan (P) dans l'espace.

2. Equations cartésiennes d'un plan de l'espace

Théorème :

Le plan (P) passant par le point $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et

$\vec{v} \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$ est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que : les 3 vecteurs

\vec{AM} ; \vec{u} et \vec{v} soient coplanaires c.à.d. : $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$

L'équation cartésienne d'un plan (P) de l'espace s'écrit sous la forme :

$ax + by + cz + d = 0$ où a, b, c et d des nombres réels et a, b et c non tous nuls.

3. Position relative de 2 plans :

Théorème :

Soient les plans $(P): ax + by + cz + d = 0$ et $(P'): a'x + b'y + c'z + d' = 0$

On a :

- (P) et (P') sont parallèles \Leftrightarrow les vecteurs $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{n}' \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ sont colinéaires
- (P) et (P') sont sécants en une droite \Leftrightarrow les vecteurs $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{n}' \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires